This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

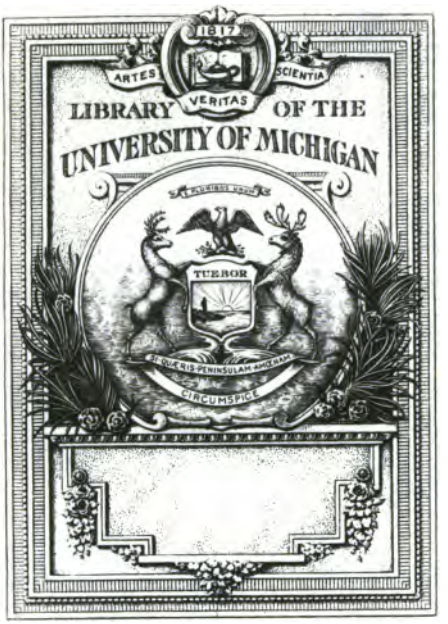
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 492805

Digitized by Google



Digitized by Google

Mathematics
QA
482
.A21

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematic

Die

Lehre von den Transversalen

in ihrer

Anwendung auf die Planimetrie.

Eine Erweiterung

der

Euklidischen Geometrie

von

C. Adams,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur.

A. BARTZNER & Cº
ANTIQUARIAT
WIEN
I, Wollzeile-Salvatorgasse 3.

Winterthur,
Druck und Verlag der Steiner'schen Buchhandlung.
1843.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
482
.A21

Die Lehre

von den

Transversalen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Die

Lehre von den Transversalen

in ihrer

Anwendung auf die Planimetrie.

Eine Erweiterung

der

Euklidischen Geometrie

von

C. Adams,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur.

Winterthur,

Druck und Verlag der Steiner'schen Buchhandlung.

1843.

Digitized by Google

Mathematics
QA
482
.A21

Digitized by Google

Vorrede.

Mathematics
Bernau
4-4-24
10209

Die Lehre von den Transversalen gehört zu den schönen Bereicherungen, welche die Geometrie in der neuern Zeit erhalten hat. Carnot's mémoire darüber verräth dieselbe Meisterhand, mit der seine géométrie de position geschrieben ist. Aber Carnot gibt nur die Grundzüge dieser Lehre, während er uns durch einige interessante Anwendungen ahnen läßt, wie tief die weitere Entwickelung derselben in das ganze Gebiet der Geometrie eingreift. — Zwei andere französische Mathematiker, Servois und Brianchon wandten die Transversalen mit glänzendem Erfolg auf die Aufgaben der praktischen Geometrie an; für ihre Anwendung indeß auf die reine Geometrie geschah bis jetzt äußerst wenig. Leider sind unsere meisten Lehrbücher der Geometrie bloße Nachklänge von Euclid und Legendre, viele allerdings zweckmäßig für den engen Kreis, für welchen sie bestimmt sind; aber sie ignoriren fast ganz die neuern Fortschritte der Wissenschaft und verführen gar leicht zu dem Glauben, als sei mit ihren in schöner logischer Ordnung paradirenden Sätzen das ganze Gebiet der Geometrie abgeschlossen. Eingewiegt in die Zuversicht, das Feld der Geometrie sei erschöpft, wirft sich gewöhnlich der junge Mathematiker mit aller Macht der

Digitized by Google

Analysis in die Arme, studirt Euler und Lagrange und sieht bald mit bemitleidendem Achselzucken auf den alten Euclid und die alten geometrischen Studien herab. Sollte nicht auch hierin der Grund liegen, daß die Werke unserer ausgezeichnetesten Geometer, eines Poncelet und vor allen des genialen Steiner bei vielen sonst höchst achtungswerthen und verdienstvollen Mathematikern so wenig Anklang finden? —

In der That contrastirt jene alt hergebrachte Beschränktheit der Betrachtungsweise zu sehr mit der verallgemeinernden Auffassung dieser ausgezeichneten Geometer, als daß nicht mancher selbst tüchtige Kopf durch die Schwierigkeit des Uebergangs abgeschreckt würde. —

Um diesen Uebergang zu bahnen, muß von unten begonnen werden. Die Lehrbücher der Geometrie müssen eine ganz andere Gestalt gewinnen und uns lebendiger als bis jetzt der Fall war, in die vielfachen Wechselbeziehungen und Abhängigkeitsverhältnisse der geometrischen Gebilde einführen. — Dann ebnet sich von selbst die Kluft, welche die eigentliche Elementar- und höhere Geometrie scheidet. Eigenschaften des Kreises ziehen sich durch das Gesammtgebiet der Kegelschnitte, und die einfachsten Sätze von den Transversalen führen auf Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. —

In gegenwärtiger Schrift, welche zunächst für die hiesige Gewerbschule ausgearbeitet wurde, habe ich versucht, Jünglinge von 16 — 18 Jahren, die bereits mit der Euclidischen Geometrie bekannt sind, allmählig in die verallgemeinernde Betrachtungsweise der neueren Geometrie einzuführen. — Ueberall war mein Streben, den einzelnen Sätzen mit möglichster Beibehaltung der Euclidischen Form die größte Allgemeinheit zu geben, so weit dies zulässig war, ohne zur Betrachtung des Raumes überzugehen. So hoffe ich, daß meine Arbeit auch in weiteren Kreisen Beachtung finde, namentlich in solchen Lehranstalten, welche auf eine besondere Cultivirung der neueren Geometrie, wie sie sich seit Monge géométrie descriptive entwickelt hat, hingewiesen sind. —

Digitized by Google

Abhandlungen anderer Geometer in Crelle's Journal und Gergonne's Annalen habe ich theilweise benutzt; doch dürfte der Kenner zugleich manches Eigenthümliche und Neue in dieser Schrift finden, das dem Streben des Verfassers, möglichst gründlich und möglichst klar zu sein, das Dasein verdankt. —

Ist es mir gelungen, durch diese kleine Arbeit das Interesse für geometrische Spekulation gefördert, und etwas zur Verbreitung mathematischer Wahrheiten beigetragen zu haben, dann ist der Zweck, welchen ich mir vorsetzte, vollkommen erreicht.

C. Adams.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Erster Abschnitt. Das Dreieck mit seinen Transversalen . . . . Seite 5

Zweiter Abschnitt. Das Viereck.

a. Die harmonische Proportion . . . . . „ 39

b. Die Involution . . . . . „ 63

Dritter Abschnitt. Das Vieleck . . . . . „ 73

Vierter Abschnitt. Der Kreis.

a. Pol und Polare . . . . . „ 85

b. Der Kreis mit ein- und umschriebenen Figuren . . . „ 91

c. Mehrere Kreise in Verbindung mit einander. Potenzlinie und Potenzpunkt. — Aufgaben über die Berührungen . „ 111

Fünfter Abschnitt. Aufgaben aus der praktischen Geometrie . . . „ 127

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Erſter Abſchnitt. Das Dreieck mit ſeinen Transverſalen.

Zweiter Abſchnitt. Das Viereck.

a. Die harmoniſche Proportion.
b. Die Involution.

Dritter Abſchnitt. Das Vieleck.

Vierter Abſchnitt. Der Kreis.

a. Pol und Polare.
b. Der Kreis mit ein und umſchriebenen Figuren.
c. Mehrere Kreiſe in Verbindung mit einander. Potenzlinie und Potenzpunkt. Aufgaben über die Berührungen.

Fünfter Abſchnitt. Aufgaben aus der praktiſchen Geometrie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erſter Abſchnitt.

Das Dreieck mit ſeinen Transverſalen.

Erklärung.

Transverſale heißt jede gerade oder krumme Linie, welche ein Syſtem von anderen geraden oder krummen Linien durchſchneidet. Hier wird nur von der geraden Linie und der Kreislinie die Rede ſein. —

Lehrſatz I.

(Figur 1, a. und b.)

Wenn die Seiten eines Dreiecks oder auch ihre Verlängerungen von einer beliebigen geradlinigen Transverſale geſchnitten werden, ſo theilt dieſe Transverſale jede Seite des Dreiecks in zwei ſolche Abſchnitte, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abſchnitten gleich iſt dem Produkte der drei andern, d. h. es iſt

$$AM.\ BP.\ CN. = AN.\ BM.\ CP.$$

Beweis.

Man ziehe aus A mit der Transverſale MP die Parallele AQ, ſo iſt:

$$AM : BM = QP : BP.$$
$$BP : CP = BP : CP.$$
$$CN : AN = CP : QP.$$

Digitized by Google

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden ersten Glieder, es ist mithin

AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

Zusatz.

(Figur 2, a. und b.)

Geht die Transversale durch die Mitte P einer der Dreiecksseiten BC oder ist mit dieser Seite parallel, so werden jedesmal zwei Segmente BP und CP einander gleich, im letzten Fall deßhalb, weil beide unendlich groß werden, und nur um die endliche Größe BC verschieden sind; daraus ergibt sich:

AM. CN. = AN. BM. oder auch
AM: BM. = AN: CN. d. h.

die beiden anderen Seiten des Dreiecks werden durch die Transversale in gleichem Verhältniß getheilt. (Siehe Euclid VI, 2).

Lehrsatz II.

(Figur 1, a. und b.)

Umgekehrt, werden auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten Seite oder auch auf den Verlängerungen aller drei Seiten die Punkte M, N, P so bestimmt, daß die Relation:

AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

statt findet, so liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie. —

Beweis.

Man ziehe MN, welche verlängert die BC in P′ treffe, so ist zu zeigen, daß P′ mit P zusammenfällt. Nun ist nach Lehrsatz I:

(I) AM. BP′. CN. = AN. BM. CP′.

Aber zufolge unserer Voraussetzung ist

(II) AM. BP. CN = AN. BM. CP.

Dividirt man (I) durch (II), so folgt:

Digitized by Google

$\frac{BP'}{BP} = \frac{CP'}{CP}$ oder was dasselbe ist:

BP′: CP′ = BP: CP, mithin ist auch

BP′: BP′ + CP′ = BP: BP + CP, d. i.

BP′: BC = BP: BC, folglich

BP′ = BP, d. h. es fällt der Punkt P′ stets mit P zusammen, oder es liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie. —

Lehrsatz III.

(Figur 3, a und b.)

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC liegenden Punkt O von den Ecken des Dreiecks die Transversalen AO, BO, CO zieht und dieselben verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks treffen, so entstehen auf jeder Seite zwei Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt der drei andern, d. h. es ist

AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

Beweis.

Da das Dreieck ABP von der Transversale CM, und das Dreieck ACP von der Transversale BN geschnitten wird, so folgt aus Lehrsatz I:

AM. BC. PO. = AO. BM. PC und
AO. BP. CN. = AN. PO. BC.

Multiplizirt man diese beiden Gleichungen in einander, und läßt die gleichen Faktoren BC. AO. PO weg, so erhält man:

AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

Zusatz 1.

Da

△ AMO : △ BMO = AM : BM.
△ BOP : △ COP = BP : CP.
△ CON : △ AON = CN : AN

so folgt durch Multiplikation:

AMO. BOP. CON = AON. BMO. COP, d. h. das Produkt aus

Digitized by Google

drei nicht an einander liegenden kleinern Dreiecken, die sämmtlich ihre Ecke in O haben, ist gleich dem Produkt der drei anderen. —

Zusatz 2.

(Figur 4, a und b.)

Geht eine Transversale AP durch die Mitte P einer Dreiecksseite BC so ist

$$BP = CP, \text{ folglich auch}$$
$$AM \cdot CN = AN \cdot BM \text{ oder}$$
$$AM : BM = AN : CN \text{ d. h.}$$

die beiden anderen Seiten des Dreiecks werden alsdann durch die entsprechenden Transversalen in gleichem Verhältniß getheilt. Umgekehrt, werden zwei Seiten des Dreiecks durch die zugehörigen Transversalen in gleichem Verhältniß getheilt, so theilt die dritte durch den Durchschnitt der beiden ersten gehende Transversale die zugehörige Dreiecksseite in zwei gleiche Theile. —

Aus

$$AM : BM = AN : CN$$

folgt nämlich

$$AM \cdot CN = AN \cdot BM$$

und hieraus in Verbindung mit unserem Lehrsatz

$$BP = CP.$$

Dieser Satz läßt sich auch auf folgende Art darstellen:

Wenn man in einem Paralleltrapez BMNC die nicht parallelen Seiten verlängert, bis sie sich in A treffen und diesen Punkt mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen verbindet, so geht die Verbindungslinie durch die Mitte der parallelen Seiten des Trapezes.

Zusatz 3.

(Figur 5.)

Liegt der Punkt O so, daß eine Transversale AP mit einer Dreiecksseite BC parallel geht, so ist wieder

$$BP = CP$$

folglich auch, wie in Zusatz 2

$$(I) \quad AM : BM = AN : CN.$$

Digitized by Google

Zieht man nun durch N die QS parallel mit BC, so ist

(II) AN : CN = AQ : BQ.

folglich auch durch Verbindung von (I) und (II):

AM. : BM. = AQ. : BQ. oder
AM. : AQ. = BM. : BQ.

eine Proportion, welche mit dem Namen „harmonische Proportion" bezeichnet wird. Das Wesen derselben wird im zweiten Abschnitt dieses Werkchens noch näher erörtert werden. —

Lehrsatz IV.

(Figur 3, a. und b.).

Umgekehrt, werden auf den drei Seiten eines Dreiecks oder auch auf einer Seite und den Verlängerungen der beiden andern drei Punkte M, N, P so bestimmt, daß die Relation:

AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

statt findet, so schneiden sich die drei Transversalen AP, BN, CM in einem und demselben Punkt. —

Beweis.

Der Durchschnitt von BN und CM sei O, und die AO schneide die BC in P′, so ist zu zeigen, daß P′ mit P zusammenfällt.

Nun ist nach Lehrsatz III.:

(I) AM. BP′. CN. = AN. BM. CP′.

Aber zufolge unserer Voraussetzung ist

(II) AM. BP. CN. = AN. BM. CP.

Dividirt man (I) durch (II), so folgt:

$\frac{BP'}{BP} = \frac{CP'}{CP}$ oder, was dasselbe ist:

BP′ : CP′ = BP : CP, mithin ist auch

BP′ : BP′ + CP′ = BP : BP + CP, d. i.

BP′ : BC = BP : BC, folglich

BP′ = BP d. h.

es fällt der Punkt P′ mit P zusammen, oder die Linien AP, BN, CM schneiden sich in einem und demselben Punkt.

Digitized by Google

Anmerkung.

Zwischen Lehrsatz II u. Lehrsatz IV findet eine große Aehnlichkeit statt; der einzige Unterschied zwischen beiden liegt in der geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten, welche auf den Seiten selbst, nicht auf ihren Verlängerungen genommen werden; für Lehrsatz II ist diese Zahl stets eine gerade, nämlich 0 oder 2; für Lehrsatz IV immer eine ungerade, 1 oder 3. — In jenem Fall liegen bei der bezeichneten Relation:

$$AM.\ BP.\ CN. = AN.\ BM.\ CP.$$

die Punkte M, N, P in gerader Linie; in diesem Fall liegen sie so, daß die aus den Spitzen nach den entsprechenden Punkten gezogenen Linien sich in einem und demselben Punkte durchschneiden. Dieser Unterschied ist bei der häufigen Anwendung beider Sätze von Wichtigkeit.

Lehrsatz V.

(Figur 6, a und b.)

Zieht man durch einen Punkt O innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC mit den Dreiecksseiten einzeln die Parallelen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, so wird

1) jede dieser Parallelen durch den Punkt O in zwei solche Abschnitte getheilt, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt der drei anderen, d. h.

$$Oa.\ Ob.\ Oc = O\alpha.\ O\beta.\ O\gamma.$$

2) wird jede Dreiecksseite durch die entsprechenden Durchschnittspunkte der Parallelen in 4 solche Abschnitte getheilt, daß das Produkt aus der einen Hälfte dieser zwölf Abschnitte gleich ist dem Produkt der andern Hälfte, wobei die Abschnitte so gewählt sind, daß die Theilungspunkte derselben Seite nie mehr als einmal in den Faktoren desselben Produktes vorkommen, d. h. es ist

$$Aa.\ A\gamma.\ Bc.\ B\beta.\ Cb.\ C\alpha = Ab.\ A\alpha.\ Ba.\ B\gamma.\ Cc.\ C\beta.$$

Beweis.

1) Verbindet man die Ecken des Dreiecks mit dem Punkt O durch die Transversalen AO, BO, CO, welche die gegenüberliegenden Seiten einzeln in P, N, M durchschneiden, so ist:

Digitized by Google

$$Oa : O\alpha = BP : CP$$
$$Ob : O\beta = AM : BM$$
$$Oc : O\gamma = CN : AN$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und erinnert sich, daß nach Lehrsatz III

AM. BP. CN = AN. BM. CP ist, so folgt:

Oa. Ob. Oc = Oα. Oβ. Oγ.

2) Es ist ferner:

$$Aa : A\alpha = Ba : C\alpha$$
$$B\beta : C\beta = Ab : Cb$$
$$A\gamma : B\gamma = Cc : Bc$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und setzt sodann die Produkte der innern und äußern Glieder einander gleich, so folgt:

Aa. Aγ. Bc. Bβ. Cb. Cα = Ab. Aα. Ba. Bγ Cc. Cβ.

Zusatz.

Liegt O in der Mitte einer der Parallelen aα, d. h. ist Oa = Oα, so hat man Ob. Oc = Oβ. Oγ oder

$$Ob : O\gamma = O\beta : Oc, \text{ d. h.}$$

die Linie bγ ist mit βc oder mit BC parallel. —

Lehrsatz VI.

(Figur 7, a und b).

Zieht man in einem Dreieck ABC drei Transversalen αα′ ββ′ γγ′ einzeln mit den drei Seiten des Dreiecks parallel, so schließen dieselben ein anderes Dreieck abc ein, das zum ursprünglichen Dreieck ABC folgende Beziehungen hat:

1) Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken beider Dreiecke schneiden sich in einem und demselben Punkt. —
2) Die Transversalen αα′, ββ′, γγ′ theilen jede Seite, sowohl des Dreiecks ABC als des Dreiecks abc in vier solche Abschnitte, daß das Produkt aus der einen Hälfte dieser zwölf Abschnitte gleich ist dem Produkt der andern Hälfte, wobei die Abschnitte so gewählt sind, daß die Theilungspunkte derselben Seite nie mehr als einmal in den Faktoren desselben Produktes vorkommen, d. h. es ist:

Digitized by Google

I) $A\alpha . A\beta' B\beta . B\gamma' . C\gamma . C\alpha' = A\gamma . A\alpha' . B\alpha . B\beta' . C\beta . C\gamma'$.

II) $a\beta . a\beta' . b\gamma . b\gamma' . c\alpha . c\alpha' = a\gamma . a\gamma' . b\alpha . b\alpha' . c\beta . c\beta'$.

Beweis.

1) Man verlängere Aa und Bb bis zu ihrem Durchschnitt in O, so ist zu zeigen, daß

O, c, C in gerader Linie liegen.

Nun ist:

$$(I)\ AB : ab = BO : bO$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc auch

$$(II)\ AB : ab = BC : bc.$$

Durch Verbindung von (I) und (II) erhält man

$$BO : bO = BC : bc$$

mithin

O, c, C in gerader Linie. —

2) Es ist ferner:

$$A\alpha : A\alpha' = B\alpha : C\alpha'$$
$$B\beta : B\beta' = C\beta : A\beta'$$
$$C\gamma : C\gamma' = A\gamma : B\gamma'$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und nimmt sodann die Produkte der innern und äußeren Glieder, so folgt

$$A\alpha . A\beta' . B\beta . B\gamma' . C\gamma . C\alpha' = A\gamma . A\alpha' B\alpha . B\beta' . C\beta . C\gamma' .$$

Dies ist die erste der oben bezeichneten Relationen; auf analoge Weise erhält man die zweite. Es ist nämlich:

$$a\gamma : c\alpha' = b\gamma : b\alpha'$$
$$b\alpha : a\beta' = c\alpha : c\beta'$$
$$c\beta : b\gamma' = a\beta : a\gamma'.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation:

$$a\beta . a\beta' . b\gamma . b\gamma' . c\alpha . c\alpha' = a\gamma . a\gamma' . b\alpha . b\alpha' . c\beta . c\beta'.$$

Anmerkung.

Der Punkt O ist der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und abc. Ausführlicher wird von demselben im dritten und vierten Abschnitte die Rede sein. —

Zusatz.

Da auch

$$a\gamma : c\alpha' = ab : bc$$
$$b\alpha : a\beta' = bc : ac$$
$$c\beta : b\gamma' = ac : ab$$

Digitized by Google

so folgt auch

$$a\gamma.\ b\alpha.\ c\beta. = a\beta'.\ b\gamma'.\ c\alpha' \text{ und eben so}$$
$$a\beta.\ b\gamma.\ c\alpha = a\gamma'.\ b\alpha'.\ c\beta'. —$$

Lehrsatz VII.

(Figur 8, a und b.)

Wenn man von einem beliebigen Punkt O innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC auf die einzelnen Seiten Perpendikel fällt, so wird dadurch jede Seite in zwei solche Abschnitte getheilt, daß die Summe der Quadrate von drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist der Summe der Quadrate der drei anderen Abschnitte, d. h. es ist

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2.$$

Beweis.

Man verbinde die Ecken des Dreiecks mit dem Punkt O, so folgt:

$$AO^2 = AM^2 + MO^2 = AN^2 + NO^2$$
$$BO^2 = BP^2 + PO^2 = BM^2 + MO^2$$
$$CO^2 = CN^2 + NO^2 = CP^2 + PO^2$$

mithin, wenn man addirt und die auf beiden Seiten gemeinsamen Glieder wegläßt:

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2.$$

Lehrsatz VIII.

(Figur 8, a und b.)

Umgekehrt, werden auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC die Punkte M, N, P so bestimmt, daß die Relation:

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2$$

statt findet, so schneiden sich die in den Punkten M, N, P auf den einzelnen Dreiecksseiten errichteten Perpendikel in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Es sei O der Durchschnitt der in M und N auf die entsprechenden

Digitized by Google

Dreiecksseiten errichteten Perpendikel; man ziehe OP′ senkrecht auf BC, so ist zu zeigen, daß P′ mit P zusammenfällt. Nun ist noch Lehrsatz VII.

$$(I)\ AM^2 + BP'^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP'^2$$

und zufolge unserer Voraussetzung:

$$(II)\ AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2.$$

Subtrahirt man (II) von (I), so bleibt

$$BP'^2 - BP^2 = CP'^2 - CP^2, \text{ also auch}$$

$$BP'^2 - CP'^2 = BP^2 - CP^2 \text{ oder}$$

$$(BP' + CP')(BP' - CP') = (BP + CP)(BP - CP).$$

Aber $BP' + CP' = BP + CP = BC$, mithin auch

$$BP' - CP' = BP - CP.$$

Addirt und subtrahirt man diese beiden letztern Gleichungen, so erhält man

$$2BP' = 2\,BP \text{ und } 2CP' = 2CP, \text{ mithin}$$

$$BP' = BP \text{ und } CP' = CP, \text{ d. h.}$$

es fällt der Punkt P′ mit P zusammen, oder die in M, N, P auf den entsprechenden Dreiecksseiten errichteten Senkrechten haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt O. —

Lehrsatz IX.

(Figur 9, a und b.)

Wenn man innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC einen Punkt O nimmt, diesen Punkt mit den Ecken des Dreiecks verbindet und auf diese Verbindungslinien in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte Senkrechte errichtet, sodann diese Senkrechten verlängert, bis sie die den einzelnen Verbindungslinien AO, BO, CO gegenüberliegenden Seiten BC, AC, AB in den Punkten P, N, M durchschneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte in gerader Linie. —

Beweis.

Es ist:

$$\triangle AMO : \triangle BMO = AM : BM$$
$$\triangle BPO : \triangle CPO = BP : CP$$
$$\triangle CON : \triangle AON = CN : AN,$$

Digitized by Google

mithin, wenn man multiplizirt:

AMO. BPO. CNO : ANO. BMO. CPO =
AM. BP. CN : AN. BM. CP.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß die beiden ersten Glieder dieser Proportion einander gleich sind. Da nämlich AO zu OP und CO zu OM senkrecht ist, so ergänzen sich die Winkel AOM und COP zu zwei Rechten; Demnach ist:

△ AMO : △ CPO = AO. OM : CO. OP und eben so
△ BPO : △ ANO = BO. OP : AO. ON
△ CNO : △ BMO = CO. ON : BO. OM.

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder identisch, daraus folgt aber die Gleichheit der beiden ersten Glieder, d. h. es ist

AMO. BPO. CNO = ANO. BMO. CPO

und demnach auch

AM. BP. CN = AN. BM. CP,

mithin liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie. (Lehrs. II.).

Lehrsatz X.

(Figur 3, a und b).

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC liegenden Punkt O von den Ecken des Dreiecks die Transversalen AO, BO, CO zieht und dieselben verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks treffen, so verhält sich das Produkt der obern Theile dieser Transversalen (d. h. derjenigen Theile, die von den Ecken bis zum gemeinsamen Durchschnittspunkt O gehen) zum Produkt der untern Theile, wie das Produkt sämmtlicher Dreiecksseiten zum Produkt von drei nicht an einander liegenden Abschnitten dieser Seiten, d. h. es ist

AO. BO. CO : PO. NO. MO = AB. AC. BC : AM. BP. CN.

Beweis.

Da das Dreieck ABP von der Transversale CM geschnitten wird, so ist nach Lehrsatz 1

AO. BM. PC = AM. BC. PO mithin
AO : PO = AM. BC : BM. CP. Eben so
BO : NO = BP. AC : CP. AN und
CO : MO = CN. AB : AN. BM.

Digitized by Google

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und läßt die gleichen Faktoren des dritten und vierten Gliedes weg, so erhält man:

AO. BO. CO : PO. NO. MO = AB. AC. BC. : AN. BM. CP

oder, weil AN. BM. CP = AM. BP. CN

AO. BO. CO : PO. NO. MO = AB. AC. BC : AM. BP. CN.

Zusatz.

(Figur 4, a. und b.)

Halbirt eine Transversale die entsprechende Dreiecksseite BC, so ist

BC = 2CP, mithin

AO : PO : = 2 AM : BM

= 2AN : CN. —

Lehrsatz XI.

(Figur 20, a. und b.)

Wenn man aus den Spitzen eines Dreiecks durch einen innerhalb oder außerhalb desselben liegenden Punkt O Transversalen auf die gegenüberliegenden Seiten zieht, sodann die Fußpunkte derselben je zwei und zwei verbindet und diese Verbindungslinien verlängert, bis sie einzeln die gegenüberliegenden Dreieckseiten treffen, so liegen die Durchschnittspunkte M, N, P, in welchen dieß Zusammentreffen Statt hat, in gerader Linie.

Beweis.

Da FP eine Transversale im Dreieck ABC ist, so ist (Lehrs. I)

AF. BP. CE = AE. BF. CP. Aber auch nach Lehrs. III

AF. BD. CE = AE. BF. CD, mithin, wenn man dividirt

$$\frac{BP}{BD} = \frac{CP}{CD}, \text{ oder}$$

BP : CP = BD : CD. Eben so

AM : BM = AF : BF und

CN : AN = CE : AE.

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so wird wegen

AF. BD. CE = AE. BF CD auch

AM. BP. CN = AN. BM. CP, mithin

M, N, P in gerader Linie, wie zu beweisen war.

Digitized by Google

Lehrsatz XII.

(Figur 21, a und b.)

Wenn zwei Dreiecke ABC und abc eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien ihrer Spitzen je zwei und zwei in demselben Punkt O zusammenlaufen, so liegen die Durchschnittspunkte M, N, P ihrer entsprechenden Seiten in gerader Linie.

Beweis.

Da die Dreiecke

OAB, OBC, OAC einzeln von den Transversalen ab, bc, ac geschnitten werden, so hat man nach Lehrs. I

$$AM.\ Bb.\ Oa = Aa.\ BM.\ Ob$$
$$BP.\ Cc.\ Ob = Bb.\ CP.\ Oc.$$
$$CN.\ Aa.\ Oc = Cc.\ AN.\ Oa.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander und läßt die gleichen Faktoren auf beiden Seiten weg, so erhält man:

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

mithin M, N, P in gerader Linie (Lehrsatz II).

Zusatz.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar Lehrsatz XI, der nur ein specieller Fall von diesem ist.

Erklärung.

Die Dreiecke abc und ABC heißen homologe Dreiecke, O heißt ihr homologer Mittelpunkt, MP ihre homologe Axe.

Lehrsatz XIII.

(Figur 21, a. und b.)

In zwei homologen Dreiecken hat das Verhältniß der Entfernungen von je zwei homologen Spitzen zu ihrem homologen Mittelpunkt mit dem Verhältniß der Entfernungen derselben Spitzen zur homologen Axe stets ein und dasselbe unveränderliche Verhältniß, es ist

$$\frac{Oa}{OA} : \frac{Qa}{QA} = \frac{Ob}{OB} : \frac{Q'b}{Q'B}$$

Digitized by Google

Beweis.

Betrachtet man in dem Dreieck OQQ′ die Linien ab und AB als Transversalen, so hat man:

$$Oa.\ QM.\ Q'b = Ob.\ Q'M.\ Qa \text{ und}$$
$$OA.\ QM.\ Q'B = OB.\ Q'M.\ QA.$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander, so erhält man

$$\frac{Oa}{OA} \cdot \frac{Q'b}{Q'B} = \frac{Ob}{OB} \cdot \frac{Qa}{QA} \text{ oder}$$
$$\frac{Oa}{OA} : \frac{Qa}{QA} = \frac{Ob}{OB} : \frac{Q'b}{Q'B}. —$$

Lehrsatz XIV.

(Figur 22.)

Haben zwei Dreiecke abc und ABC eine homologe Lage und zieht man von einem beliebigen Punkt Q Linien durch die Spitzen a, b, c des einen Dreiecks, bis sie die homologe Axe in den Punkten α, β, γ treffen, und verbindet diese Punkte einzeln mit den Spitzen A, B, C des zweiten Dreiecks, so laufen

1) diese drei Verbindungslinien in einen und denselben Punkt O zusammen,
2) liegen die Punkte O, Q, O′ in gerader Linie.

Beweis.

1) Gesetzt, der Durchschnitt von αA und βB sei in O′, so ist zu zeigen, daß γ, C, O′ in gerader Linie liegen. Zu dem Ende betrachte man

Qγ	als	Transversale	des	Dreiecks	βbP
O′α	"	"	"	"	βBM
Qα	"	"	"	"	βbM
Na	"	"	"	"	MbP
NA	"	"	"	"	MBP

so ergeben sich folgende Relationen:

$$\beta\gamma.\ Pc.\ bQ = \beta Q.\ P\gamma.\ bc$$
$$BO'.\ MA.\ \beta\alpha = BA.\ M\alpha.\ \beta O'$$
$$\beta Q.\ ba.\ M\alpha = \beta\alpha.\ bQ.\ Ma$$
$$Ma.\ bc.\ PN = MN.\ ba.\ PC$$
$$PC.\ MN.\ BA = PN.\ MA.\ BC.$$

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

$$\beta\gamma.\ BO'.\ PC = \beta O'.\ BC.\ P\gamma$$

d. h. es ist $O'C\gamma$ eine Transversale des Dreiecks βBP oder es liegen die Punkte O', C, γ in gerader Linie (Lehrs. II).

2) Betrachtet man die Linien $Q\beta$ und $O'\beta$ als Transversalen der Dreiecke αaM und αAM, ferner OB als Transversale des Dreiecks aMA, so ergibt sich:

$$aQ.\ \alpha\beta.\ Mb = ab.\ \alpha Q.\ M\beta$$
$$\alpha O'.\ AB.\ M\beta = \alpha\beta.\ AO'.\ MB$$
$$AO.\ ab.\ MB = AB.\ Mb.\ aO.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so folgt:

$$aQ.\ \alpha O'.\ AO = aO.\ \alpha Q.\ AO'$$

mithin ist OQO' eine Transversale des Dreiecks αaA oder es liegen O, Q, O' in gerader Linie.

Lehrsatz XV.

(Figur 10.)

Verbindet man in einem Dreieck ABC die Enden mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Da $AM = BM$
$BP = CP$
$CN = AN$, so ist auch
$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$

mithin haben nach Lehrs. IV die drei Transversalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Zusatz.

Nennt man den Durchschnitt der drei Transversalen S, so ist nach Lehrs. X, Zusatz:

$$AS : PS = 2AM : BM$$
$$= 2 : 1 \quad \text{Ebenso}$$
$$BS : NS = 2 : 1 \quad \text{und}$$
$$CS : MS = 2 : 1.$$

Digitized by Google

Anmerkung.

Der Punkt S heißt wegen einer in der Mechanik vorkommenden Eigenschaft der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. —

Lehrsatz XVI.

(Figur 11, a. und b.)

Fällt man in einem Dreieck ABC aus den Ecken die Perpendikel AP, BN, CM auf die gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich diese Höhenperpendikel in einem und demselben Punkt.

Beweis I.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

AMC und ANB
ABP und BMC
APC und BCN folgt:

$$AM : AN = AC : AB$$
$$BP : BM = AB : BC$$
$$CN : CP = BC : AC.$$

Multiplicirt man diese Proportionen in einander, so folgt wegen Gleichheit der letzten beiden Glieder auch

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

mithin haben die drei Höhenperpendikel einen gemeinsamen Durchschnittspunkt.

Beweis II.

Es ist

$$AM^2 = AC^2 - CM^2$$
$$BP^2 = AB^2 - AP^2$$
$$CN^2 = BC^2 - BN^2 \text{ mithin}$$

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2 - (AP^2 + BN^2 + CM^2)$$

Eben so ist

$$AN^2 + BM^2 + CP^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2 - (AP^2 + BN^2 + CM^2)$$

folglich auch

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2$$

mithin haben die drei Senkrechten einen gemeinsamen Durchschnittspunkt. (Lehrs. VIII.)

Digitized by Google

Lehrſatz XVII.

(Figur 12, a und b).

Die drei Senkrechten, welche einzeln auf der Mitte jeder Dreiecksſeite errichtet werden, ſchneiden ſich, gehörig verlängert, in einem und demſelben Punkt.

Beweis I.

Man verbinde die Mitten der Dreiecksſeiten durch die Geraden ab, ac, bc, ſo entſteht ein neues Dreieck abc, deſſen Seiten einzeln mit denen des Dreiecks ABC parallel ſind (Euclid VI, 2). Nun ſind aber im Dreiecke abc die Senkrechten aZ, bZ, cZ Höhenperpendikel, folglich haben dieſelben einen gemeinſamen Durchſchnittspunkt (Lehrſ. XVI).

Beweis II.

Aus $Ac = Bc$
$Ba = Ca$
$Cb = Ab$ folgt

$$Ac^2 + Ba^2 + Cb^2 = Ab^2 + Bc^2 + Ca^2$$

mithin ſchneiden ſich die drei Senkrechten in einem und demſelben Punkt (Lehrſatz VIII).

Zuſatz I.

Da der Punkt Z von den Ecken des Dreiecks ABC gleich weit entfernt iſt, ſo iſt er der Mittelpunkt des um das Dreieck beſchriebenen Kreiſes.

Zuſatz II.

Zieht man in dem Dreieck ABC zugleich die Höhenperpendikel AO, BO, CO, ſo ſind die Dreiecke AOB und abZ wegen des Parallelismus ihrer Seiten einander ähnlich. Daraus folgt:

$$AO : aZ = AB : ab = 2 : 1$$

mithin

$$AO = 2Za$$
$$BO = 2Zb$$
$$CO = 2Zc \text{ d. h.}$$

in jedem Dreieck iſt der obere Theil eines Höhenperpendikels (d. h. der zwiſchen einer Ecke eines Dreiecks und dem Durchſchnittspunkt gelegene)

Digitized by Google

doppelt so groß, als die von dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte.

Lehrsatz XVIII.

(Figur 12, a und b).

In einem jeden Dreieck liegen folgende drei Punkte:

der Schwerpunkt S
der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel O
der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises Z

in einer und derselben geraden Linie und zwar liegt der Schwerpunkt zwischen den beiden andern Punkten so, daß seine Entfernung vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel doppelt so groß ist, als vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

Beweis.

Da AS = 2aS (Lehrs. XV, Zusatz)
AO = 2Za (Lehrs. XVII, Zusatz 2) und
∠ SAO = SaZ so sind die Dreiecke
ASO und aSZ einander ähnlich, mithin
∠ ASO = ∠ aSZ.

Da aber ASa eine gerade Linie ist, so muß wegen dieser Gleichheit der Winkel auch OSZ eine gerade Linie sein, mithin liegen die drei Punkte O, S, Z in gerader Linie. Ferner ist:

SO : SZ = AS : aS = 2 : 1
oder SO = 2 SZ wie zu erweisen war.

Lehrsatz XIX.

(Figur 11, a und b.)

Wenn man die Fußpunkte M, N, P der Höhenperpendikel eines Dreiecks ABC durch die Geraden MN, MP, NP mit einander verbindet, so entsteht ein neues Dreieck MNP, in welchem das Produkt sämmtlicher Seiten gleich ist dem Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten der Seiten des Dreiecks ABC, d. h. es ist

MN. MP. NP = AM. BP. CN.

Digitized by Google

Beweis.

Da sich um die Vierecke BMNC und ABPN Kreise beschreiben lassen, so ist

$$\angle MBP = \angle ANM = \angle CNP.$$ Eben so
$$\angle MAN = \angle MPB = \angle NPC,$$ mithin die Dreiecke

AMN, BMP, CNP

einander ähnlich. Daraus folgt:

$$AN : MN = NP : CN$$
$$BM : MP = MN : AM$$
$$CP : NP = MP : BP.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so erhält man:

$$AN.\ BM.\ CP : MN.\ MP.\ NP. = MN.\ MP.\ NP. : AM.\ BP.\ CN.$$

und weil nach Lehrsatz III

$$AN.\ BM.\ CP = AM.\ BP.\ CN$$

so ist auch, wenn man das Produkt der innern und äußern Glieder nimmt:

$$MN^2.\ MP^2.\ NP^2 = AM^2.\ BP^2.\ CN^2, \text{ also auch}$$
$$MN.\ MP.\ NP = AM.\ BP.\ CN. —$$

Lehrsatz XX.

(Figur 13.)

Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreieck ABC über den beiden Catheten Quadrate beschreibt, und man zieht aus den spitzen Winkeln des Dreiecks nach den gegenüberliegenden Eckpunkten dieser Quadrate die Geraden BE und CD, so wie aus der Ecke A auf die Hypothenuse die Senkrechte AG, so schneiden sich diese drei Linien in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

AHC und DHB
JCE und ABJ folgt:

Digitized by Google

$$AH : BH = AC : BD$$
$$CJ : AJ = CE : AB,$$

folglich, weil $BD = AB$ und $CE = AC$ ist

auch:

$$AH : BH = AC : AB$$
$$CJ : AJ = AC : AB.$$

Es ist aber auch

$$BG : CG = AB^2 : AC^2.$$

Multiplizirt man diese drei Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden ersten, d. h. es ist:

$$AH \cdot BG \cdot CJ = AJ \cdot BH \cdot CG,$$

mithin schneiden sich die drei Geraden AG, CD, BE in einem und demselben Punkt. (Lehrsatz IV.).

Lehrsatz XXI.

(Figur 14, a und b).

Wenn man aus dem Winkelscheitel eines beliebigen Dreiecks ABC nach der gegenüberliegenden Seite eine Transversale zieht, welche den Winkel an der Spitze oder seinen Nebenwinkel halbirt, so theilt diese Transversale die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, welche sich zu einander verhalten, wie die den getheilten Winkel einschließenden Seiten, d. h. es ist

$$BD : CD = AB : AC.$$

Beweis.

Man ziehe CE parallel mit AD, so ist

$$\angle ACE = \angle CAD = \angle DAB = \angle AEC,$$

mithin auch $AE = AC$.

Da nun die Dreiecke ABD und EBC einander ähnlich sind, so hat man:

$$BD : CD = BA : AE \text{ oder, weil } AE = AC$$
$$BD : CD = BA : AC.$$

Digitized by Google

Zusatz.

(Figur 14, b).

Halbirt man in Figur 14, b noch den Scheitelwinkel ABC, so hat man

$$BD' : D'C = BD : DC, \text{ d. h.}$$

die Linie BD wird so getheilt, daß sich der erste Theil zum zweiten verhält, wie die ganze Linie zum dritten Theil. Eine solche Eintheilung heißt die harmonische, (siehe Lehrsatz III, Zusatz 3) und die Punkte D, D', so wie B, C heißen zugeordnete harmonische Punkte. Näheres darüber siehe zu Anfang des zweiten Abschnitts. —

Aufgabe.

(Figur 17).

Ueber einer gegebenen Grundlinie BC ein Dreieck zu beschreiben, dessen beide andern Seiten ein gegebenes Verhältniß (m : n) zu einander haben.

Auflösung.

Man theile die Grundlinie BC in dem gegebenen Verhältniß m : n. Es sei D der Theilungspunkt; ziehe in B unter einem beliebigen Winkel die Gerade BM, mache Bd = BD und dc = CD, ziehe cC und aus d die dE parallel mit cC und beschreibe endlich über DE als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser Kreis der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks.

Beweis.

Nach der Konstruktion ist:

$$BE : CE = Bd : cd = BD : CD,$$

mithin die Linie BC in D und E harmonisch getheilt. (Siehe Lehrs. XXI, Zusatz).

Man ziehe von einem beliebigen Punkt A des Halbkreises nach den harmonischen Punkten B, D, C, E die Geraden
AB, AD, AC, AE, ferner CF parallel mit AE und mache AG = AF, dann ist

Digitized by Google

$$AE : EC = BA : \left\{ \begin{matrix} AF \\ AG \end{matrix} \right\}$$ ferner

BE : CE = BD : CD, folglich auch

BA : AG = BD : CD, mithin

CG mit AD parallel. Da nun auch

CF mit AE parallel ist, so ist

$\angle$ FCG = $\angle$ DAE = R, folglich geht der aus A mit AF beschriebene Kreis auch durch C oder es ist AC = AF. Dadurch wird die obige Proportion jetzt folgende:

BE : EC = BA : AC oder

BA : AC = m : n.

Anmerkung.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe siehe in Ungers Euclid, Seite 574, Aufg. 588.

Lehrsatz XXII.

(Figur 15.)

Wird in einem Dreieck ABC der Winkel A durch die Gerade AD halbirt, so ist das Quadrat dieser Halbirungslinie gleich dem Rechteck aus den einschließenden Seiten des halbirten Winkels weniger dem Rechteck aus den Abschnitten der dritten Seite; wird aber der Nebenwinkel von A durch die Gerade AE halbirt und die Halbirungslinie verlängert, bis sie die Grundlinie des Dreiecks in E trifft, so ist das Quadrat dieser Halbirungslinie gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der gegenüberliegenden Seiten weniger dem Rechteck aus den beiden andern Seiten des Dreiecks, d. h. es ist

I) $AD^2 = AB.\ AC - BD.\ DC.$

II) $AE^2 = BE.\ CE - AB.\ AC.$

Beweis.

Man beschreibe um BAC einen Kreis, verlängere AD und AE, bis sie den Kreis in F und G treffen und ziehe endlich CF und CG, dann ist

I) wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und AFC

AB : AD = AF : AC, folglich

AD. AF = AB. AC, oder

Digitized by Google

$AD\,(AD + DF) = AB.\,AC$, das ist
$AD^2 + AD.\,DF = AB.\,AC$, folglich
$AD^2 = AB.\,AC - AD.\,DF$.
Aber $AD.\,DF = BD.\,DC$. mithin
$AD^2 = AB.\,AC - BD.\,DC$.

II) Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke
ABE und AGC :
$AB : AE = AG : AC$, folglich
$AE.\,AG = AB.\,AC$, mithin auch
$AE\,(GE - AE) = AB.\,AC$, oder
$AE.\,GE - AE^2 = AB.\,AC$. Hieraus folgt
$AE^2 = AE.\,GE - AB.\,AC$ und weil
$AE.\,GE = BE.\,CE$, so ist
$AE^2 = BE.\,CE - AB.\,AC$.

Zusatz.

Addirt man I und II, so erhält man
$AD^2 + AE^2 = BE.\,CE - BD.\,DC$
oder, da wegen des rechten Winkels DAE
$AD^2 + AE^2 = DE^2$ auch
$DE^2 = BE.\,CE - BD.\,DC$.

Anmerkung.

Nennt man den Theilpunkt, in welchem die Halbirungslinie die Dreiecksseite BC trifft, für beide Fälle D, so hat man:
$AB.\,AC = BD.\,CD \pm AD^2$.

Lehrsatz XXIII.

(Figur 16, a und b).

Wenn man aus der Spitze B eines Dreiecks eine beliebige Transversale BD nach der gegenüberliegenden Seite zieht, diese Transversale halbirt und den Halbirungspunkt E mit einer andern Spitze A des Dreiecks verbindet, so theilt diese Verbindungslinie AE die dem Punkt A gegenüberliegende Dreiecksseite so, daß sich die beiden Abschnitte zu einander verhalten, wie die B gegenüberliegende Dreiecksseite AC zu dem zwischen A und dem Theilpunkt D liegenden Abschnitt AD, d. h. es ist:
$BF : FC = AD : AC$.

Digitized by Google

Beweis.

Man ziehe die CG mit BD parallel, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

BEF und CFG
AED und ACG:

BF : FC = BE : CG und
AD : AC = DE : CG.

Da nun zufolge der Konstruktion BE = DE ist, so ist auch

BF : FC = AD : AC.

Zusatz.

Macht man AD = AB, so hat man Lehrs. XXI, nämlich

BF : FC = AB : AC.

Lehrsatz XXIV.

(Figur 18, a und b.)

Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC eine beliebige Transversale nach der gegenüberliegenden Seite zieht, so ist das Quadrat einer der gleichen Seiten des Dreiecks gleich dem Quadrate dieser Transversale plus oder minus dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Grundlinie, je nachdem die Transversale die Grundlinie selbst oder ihre Verlängerung trifft, d. h. es ist

$$AB^2 = AD^2 \pm BD.\ CD.$$

Beweis.

Man beschreibe aus A mit AB als Halbmesser einen Kreis, der zugleich durch C geht, dann ist

$$AB^2 = AE^2 = AD^2 \pm DE^2 \text{ und weil}$$
$$DE^2 = BD.\ CD \text{ auch}$$
$$AB^2 = AD^2 \pm BD.\ CD.$$

Lehrsatz XXV.

(Figur 19, a. und b.)

Wenn man in einem beliebigen Dreieck ABC aus einer Spitze A eine beliebige Transversale nach der gegenüberliegenden Seite zieht, so ist stets:

Digitized by Google

$$BC.\ BD.\ CD = AB^2.\ CD \pm AC^2.\ BD \mp AD^2.\ BC,$$

wo die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die Transversale die Grundlinie selbst oder ihre Verlängerung trifft.

Beweis.

Man beschreibe aus A mit der größeren anliegenden Seite AC einen Kreis und verlängere BC, AB und AD bis sie den Kreis in den Punkten J, E, F, G, H treffen, dann ist:

$$DC.\ DJ = DH.\ DG \text{ oder}$$

$$DC\ (BD + BJ) = (AC + AD) \times \pm\ (AC - AD) \text{ d. h.}$$

$$(I)\ BD.\ CD + CD.\ BJ = \pm\ (AC^2 - AD^2).$$

Ferner ist:

$$BC.\ BJ = BF.\ BE \text{ oder}$$

$$BC.\ BJ = (AC + AB)\ (AC - AB) \text{ d. h.}$$

$$(II)\ BC.\ BJ = AC^2 - AB^2.$$

Man multiplizire nun (I) mit BC, (II) mit CD, so folgt

$$(III)\ BC.\ BD.\ CD + BC.\ CD.\ BJ = \pm\ AC^2.\ BC \mp AD^2.\ BC.$$

$$(IV)\qquad BC.\ CD.\ BJ = AC^2.\ CD - AB^2.\ CD.$$

Subtrahirt man nun (IV) von (III), so bleibt

$$BC.\ BD.\ CD = AB^2.\ CD \pm AC^2.\ BD \mp AD^2.\ BC.$$

Zusatz 1.

Ist das Dreieck gleichschenkelig, d. h. AB = AC, so hat man:

$$BC.\ BD.\ CD = AB^2\ (CD \pm BD) \mp AD^2.\ BC$$

$$= \pm\ AB^2.\ BC \mp AD^2.\ BC \text{ oder auch}$$

wenn man mit BC theilt

$$BD.\ CD = \pm\ (AB^2 - AD^2) \text{ oder}$$

$$AB^2 = AD^2 \pm BD.\ CD$$

mithin wird man auf Lehrsatz XXIV zurückgeführt, der als spezieller Fall in diesem allgemeinen Satze enthalten ist. — Macht man noch

BD = CD d. h. zieht man im gleichschenkeligen Dreieck die Transversale aus der Spitze nach der Mitte der Grundlinie, so hat man

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

was der Pythagorische Lehrsatz ist.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Wird durch die Transversale AD der Winkel an der Spitze oder sein Nebenwinkel halbirt, so ist

$$AB : AC = BD : CD \text{ oder}$$
$$AB.\ CD = AC.\ BD.$$

Substituirt man diesen Werth in die Hauptformel dieses Lehrsatzes, so hat man:

$$BC.\ BD.\ CD = AB.\ CD\ (AB \pm AC) \mp AD^2.\ BC$$

mithin ist auch

$$(a)\ BC\ (BD.\ CD \pm AD^2) = AB.\ CD\ (AB \pm AC).$$

Aus $AB.\ CD = AC.\ BD$ folgt aber auch

$$AB.\ CD = AC\ (BC \mp CD) \text{ oder}$$
$$(b)\quad CD\ (AB \pm AC) = AC.\ BC.$$

Substituirt man (b) in (a), so hat man

$$BC\ (BD.\ CD \pm AD^2) = AB.\ AC.\ BC$$

oder, wenn man mit BC dividirt

$$AB.\ AC = BD.\ CD \pm AD^2.$$

Dies ist Lehrsatz XXII, der also ebenfalls als spezieller Fall in unserm Hauptsatz enthalten ist.

Lehrsatz XXVI.

(Figur 23, a und b.)

Wenn man in einem beliebigen Dreieck sämmtliche Winkel oder auch einen Winkel und die Nebenwinkel der beiden andern Dreieckswinkel halbirt, so schneiden sich die drei Halbirungslinien stets in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Nach Lehrsatz XXI ist:

$$AM : BM = AC : BC$$
$$BP : CP = AB : AC$$
$$CN : AN = BC : AB.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden ersten Glieder, oder es ist

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

Digitized by Google

mithin schneiden sich die 3 Halbirungslinien in einem und demselben Punkt (Lehrsatz IV).

Zusatz.

Fällt man von S auf sämmtliche Dreiecksseiten Perpendikel Sa, Sb, Sc, so sind diese sämmtlich einander gleich. Daher ist S der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC einbeschriebenen, oder auch eines von außen berührenden Kreises.

Lehrsatz XXVII.

(Figur 24.)

Wenn man sämmtliche äußere Winkel eines Dreiecks halbirt und jede Halbirungslinie verlängert, bis sie die gegenüberliegende Seite trifft, so liegen die drei Punkte, in welchen dies Zusammentreffen statt findet, in gerader Linie.

Beweis.

Nach Lehrsatz XXI ist:

$$AM : BM = AC : BC$$
$$BP : CP = AB : AC$$
$$CN : AN = BC : AB$$

mithin, wenn man multiplizirt wieder wie vorher,

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

d. h. es liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie (Lehrsatz II).

Lehrsatz XXVIII.

(Figur 23, a und b).

Wenn man zu einem Dreieck ABC den einbeschriebenen oder einen auswärts berührenden Kreis construirt und die Berührungspunkte der einzelnen Seiten mit den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese Verbindungslinien stets in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Bezeichnet man die Berührungspunkte einzeln mit a, b, c, so ist

$$Ac = Ab$$
$$Ba = Bc$$
$$Cb = Ca$$

Digitized by Google

mithin durch Multiplikation

$$Ac.\ Ba.\ Cb = Ab.\ Bc.\ Ca$$

mithin schneiden sich Aa, Bb, Cc in einem und demselben Punkt (Lehrsatz IV).

Lehrsatz XXIX.

(Figur 23, b.)

Construirt man zu einem Dreieck ABC sämmtliche auswärts berührende Kreise und verbindet diejenigen ihrer Berührungspunkte, welche auf den Seiten des Dreiecks selbst (nicht auf ihren Verlängerungen) liegen, mit den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks, so schneiden sich auch diese drei Verbindungslinien in einem und demselben Punkt.

Beweis.

Es sei S der Mittelpunkt eines auswärts berührenden, s der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises. Da nun die Winkel SBs und SCs Rechte sind, so geht der über Ss als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Punkte B und C. Zieht man nun sv mit BC parallel und fällt von Z ein Perpendikel auf sv, so ist sw = wv, mithin auch $\alpha x = ax$, und weil auch Bx = Cx, so folgt $B\alpha = Ca$, mithin ist der auf der Seite selbst liegende Berührungspunkt eines auswärts berührenden Kreises von dem einen Endpunkt dieser Seite gleich weit entfernt, als der Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises von dem andern Endpunkt derselben. Bezeichnen demnach a, β', γ' die Berührungspunkte der auswärts berührenden Kreise, so ist

$$A\gamma' = B\gamma$$
$$Ba = C\alpha$$
$$C\beta' = A\beta \text{ mithin}$$
$$(I)\quad A\gamma'.\ Ba.\ C\beta' = A\beta.\ B\gamma.\ C\alpha.$$

Ferner ist:

$$A\beta' = C\beta$$
$$B\gamma' = A\gamma$$
$$Ca = B\alpha \text{ also auch}$$
$$(II)\quad A\beta'.\ B\gamma'.\ Ca = A\gamma.\ B\alpha.\ C\beta.$$

Nun ist aber nach Lehrsatz XXVIII

$$A\gamma.\ B\alpha.\ C\beta = A\beta.\ B\gamma.\ C\alpha.$$

Daher hat man aus (I) und (II)

$$A\gamma'.\ Ba.\ C\beta' = A\beta'.\ B\gamma'.\ Ca$$

Digitized by Google

mithin schneiden sich die Linien Aa, $B\beta'$, $C\gamma'$ in einem und demselben Punkt (Lehrsatz IV).

Lehrsatz XXX.

(Figur 25.)

Construirt man zu einem Dreieck ABC sämmtliche auswärts berührende Kreise und verbindet diejenigen ihrer Berührungspunkte α', β''; α'', γ'; β', γ'', welche in der Verlängerung der Dreiecksseiten liegen, je zwei und zwei, und verlängert diese Verbindungslinien, bis sie die entsprechenden Dreiecksseiten in M, N, P treffen, so liegen

1) diese Durchschnittspunkte M, N, P in gerader Linie,
2) liegt jeder dieser Durchschnittspunkte mit je zwei der auf den Seiten des Dreiecks selbst (nicht auf ihren Verlängerungen) liegenden Berührungspunkten derselben Kreise in gerader Linie.

Beweis.

1) Da sich $A\alpha'$, $B\beta''$, $C\gamma$ in einem und demselben Punkt durchschneiden (Lehrsatz XXVIII), so hat man nach Lehrsatz XI (siehe den Beweis):

$$AM : BM = A\gamma : B\gamma. \text{ Eben so}$$
$$BP : CP = B\alpha : C\alpha$$
$$CN : AN = C\beta : A\beta.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und erinnert sich, daß nach Lehrsatz XXIX:

$$A\gamma. B\alpha. C\beta = A\beta. B\gamma. C\alpha, \text{ so folgt}$$
$$AM. BP. CN = AN. BM. CP$$

mithin M, N, P in gerader Linie (Lehrsatz II).

2) Da sich nach Lehrsatz XXIX $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in einem und demselben Punkt schneiden, so muß nach Lehrsatz XI der Durchschnitt P' von $\beta\gamma$ und BC so liegen, daß

$$B\alpha : \alpha C = BP' : P'C.$$

Aber es ist nach dem so eben in 1) Bewiesenen auch

$$B\alpha : \alpha C = BP : PC$$

mithin fällt P' mit P zusammen oder es liegen die Punkte γ, β, P in gerader Linie.

Dasselbe gilt von α, β, M und von α, γ, N.

Digitized by Google

Lehrsatz XXXI.

(Figur 26.)

Wenn man um ein Dreieck ABC einen Kreis beschreibt und durch die Spitzen des Dreiecks an den Kreis Tangenten zieht, sodann diese Tangenten verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten M, N, P treffen, so liegen diese Durchschnittspunkte in gerader Linie.

Beweis.

Verlängert man die Tangenten, bis sie sich einzeln in den Punkten a, b, c treffen, so hat man ein dem Kreis umschriebenes Dreieck abc, in welchem sich nach Lehrsatz XXVIII die Geraden Aa, Bb, Cc in einem und demselben Punkt durchschneiden. Mithin liegen nach Lehrsatz XI M, N, P in gerader Linie.

Lehrsatz XXXII.

(Figur 27.)

Wenn man um ein Dreieck ABC einen Kreis beschreibt und von einem beliebigen Punkt O im Umfange dieses Kreises auf die drei Seiten des Dreiecks Perpendikel fällt, so liegen die Fußpunkte M, N, P dieser Perpendikel stets in gerader Linie.

Beweis.

Man ziehe von O nach den Spitzen des Dreiecks die Geraden OA, OB, OC, so hat man vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke

OAM und OCP
OBP und OAN
OCN und OBM:

$$AM : AO = CP : CO$$
$$BP : BO = AN : AO$$
$$CN : CO = BM : BO.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden das zweite und vierte Glied identisch; daraus folgt die Gleichheit des ersten mit dem dritten Gliede, d. h. es ist:

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

mithin liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie (Lehrsatz II).

Digitized by Google

Zusatz 1.

Beschreibt man über OA, OB, OC als Durchmesser Kreise, so schneiden sich dieselben einzeln in den Punkten M, N, P; es folgt daher:

Zieht man von einem in dem Umfang des Kreises liegenden Punkt drei beliebige Sehnen und beschreibt über jeder dieser Sehnen als Durchmesser einen Kreis, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Kreise in einer und derselben geraden Linie.

Zusatz 2.

Der vorstehende Lehrsatz kann noch dahin erweitert werden, daß statt der Senkrechten OM, ON, OP schräge Linien gezogen werden, welche mit den Seiten des Dreiecks nach der gleichen Seite hin gleiche Winkel bilden. Der oben gegebene Beweis behält auch für diesen allgemeinen Fall seine Gültigkeit.

Lehrsatz XXXIII.

(Figur 28, a und b).

Wenn die Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen Kreise geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite vier Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, daß das Produkt der einen Hälfte gleich ist dem Produkt der andern Hälfte, vorausgesetzt, daß in einem und demselben Produkt nicht solche Abschnitte vorkommen, welche einen Punkt des Kreises zum gemeinschaftlichen Endpunkt haben, d. h. es ist:

$$Ab.\ Ab'.\ Bc.\ Bc'.\ Ca.\ Ca' = Ac.\ Ac'.\ Ba.\ Ba'.\ Cb.\ Cb'.$$

Beweis.

Es ist:

$$Ab.\ Ab' = Ac.\ Ac'$$
$$Bc.\ Bc' = Ba.\ Ba'$$
$$Ca.\ Ca' = Cb.\ Cb'.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander, so erhält man:

$$Ab.\ Ab'.\ Bc.\ Bc'.\ Ca.\ Ca' = Ac.\ Ac'.\ Ba.\ Ba'.\ Cb.\ Cb'$$

wie zu beweisen war.

Zusatz 1.

Wird eine Seite des Dreiecks, z. B. BC, vom Kreise nur berührt, so fallen zwei Punkte a und a' in einen zusammen und die obige Relation verwandelt sich in folgende:

Digitized by Google

$$M\alpha^2 = AM^2 - A\alpha^2$$
$$P\beta^2 = BP^2 - B\beta^2$$
$$N\gamma^2 = CN^2 - C\gamma^2, \text{ mithin}$$

$$M\alpha^2 + P\beta^2 + N\gamma^2 = AM^2 + BP^2 + CN^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2).$$

Eben so

$$N\alpha^2 + M\beta^2 + P\gamma^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2).$$

Nun ist aber nach Lehrsatz XVI, Beweis II:

$$AM^2 + BP^2 + CN^2 = AN^2 + BM^2 + CP^2$$

mithin auch

$$M\alpha^2 + P\beta^2 + N\gamma^2 = N\alpha^2 + M\beta^2 + P\gamma^2$$

daher schneiden sich die drei Senkrechten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in einem und demselben Punkt (Lehrsatz VIII).

Zusatz.

Da $\angle AMN = \angle BMP = \angle ACB$, so ist
$\angle MA\alpha = \angle MB\beta = R - \angle ACB$ und daher
ABQ gleichschenkelig oder $AQ = BQ$ und eben so
$AQ = CQ$, d. h. der Punkt Q, in welchem die drei Senkrechten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sich schneiden, ist der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Das Viereck.

a. Die harmonische Proportion.

Erklärung.

(Figur 31).

Eine Linie heißt harmonisch getheilt, wenn die ganze Linie zu einem der äußeren Abschnitte sich verhält, wie der andere äußere zum mittleren, oder wenn das Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Abschnitt gleich ist dem Rechteck aus den beiden äußeren.

AD ist also harmonisch getheilt, wenn

AB : BC = AD : CD oder wenn
AD. BC = AB. CD ist.

Die Punkte A, B, C, D heißen harmonische Punkte. Betrachtet man die Linie AC als ursprüngliche Linie, so ist dieselbe in B und D harmonisch getheilt. Dasselbe gilt von der Linie BD, welche in A und C harmonisch getheilt ist. Daher heißen A und C, sowie B und D zugeordnete (conjugirte) harmonische Punkte. Verbindet man einen Punkt O außerhalb dieser Linie mit den vier harmonischen Punkten A, B, C, D, so erhält man ein Strahlenbüschel von vier harmonischen Strahlen und zwar heißen OA und OC so wie OB und OD zugeordnete harmonische Strahlen.

Digitized by Google

Arithmetische Eigenschaften der harmonischen Proportion.

Aus der Proportion

$$AB : BC = AD : CD$$

ergeben sich folgende arithmetische Eigenschaften:

$$(I)\ AC.\ BD = 2\ AB.\ CD.$$

Beweis.

Es ist

$$BC.\ AD = AB.\ CD \text{ und}$$
$$AD = AB + BC + CD \text{ mithin auch}$$
$$BC\ (AB + BC + CD) = AB.\ CD. \text{ Addirt man hiezu}$$
$$AB.\ CD \qquad = AB.\ CD \text{ so erhält man}$$

$$CD\ (AB + BC) + BC\ (AB + BC) = 2\ AB.\ CD \text{ oder}$$
$$(AB + BC)\ (BC + CD) = 2\ AB.\ CD \text{ d. i.}$$
$$AC.\ BD = 2\ AB.\ CD$$

II) Halbirt man die Distanz BD zweier zugehörigen Punkte B, D in Q, so ist

$$QB^2 = QD^2 = QA.\ QC.$$

Beweis.

Da
$$AB = AQ - BQ$$
$$BC = BQ - CQ$$
$$AD = AQ + BQ$$
$$DC = BQ + CQ$$

so kann die Proportion

$$AB : BC = AD : CD \text{ auch so geschrieben werden:}$$
$$AQ - BQ : BQ - CQ = AQ + BQ : BQ + CQ$$

und hieraus folgt:

$$(AQ - BQ)\ (BQ + CQ) = (AQ + BQ)\ (BQ - CQ)$$

oder, wenn man die Produkte entwickelt und die sich aufhebenden Glieder wegläßt:

$$AQ.\ CQ - BQ^2 = BQ^2 - AQ.\ CQ \text{ d. h.}$$
$$2\ BQ^2 = 2\ AQ.\ CQ \text{ oder}$$
$$BQ^2 = AQ.\ CQ \text{ wie zu beweisen war.}$$

III) $AQ : CQ = AB^2 : BC^2$.

Digitized by Google

Beweis.

Es ist

$$AB : BC = AB : BC \text{ und}$$
$$AD : CD = AB : BC \text{ mithin auch}$$

$$AB.\ AD : BC.\ CD = AB^2 : BC^2 \text{ oder}$$
$$(AQ - BQ)\ (AQ + BQ) : (BQ - CQ)\ (BQ + CQ) = AB^2 : BC^2$$
$$\text{d. h. } AQ^2 - BQ^2 : BQ^2 - CQ^2 = AB^2 : BC^2.$$

Da nun nach II) $BQ^2 = AQ.\ CQ$ so ist auch

$$AQ^2 - AQ.\ CQ : AQ.\ CQ - CQ^2 = AB^2 : BC^2$$
$$\text{oder } AQ\ (AQ - CQ) : CQ\ (AQ - CQ) = AB^2 : BC^2$$

also auch

$$AQ : CQ = AB^2 : BC^2.$$

IV) $AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$.

Beweis.

Es ist

$$AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\ AB.\ BC$$
$$BD^2 = (CD + BC)^2 = CD^2 + BC^2 + 2\ CD.\ BC$$

mithin

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2\ BC\ (BC + AB + CD)$$

Aber $BC + AB + CD = AD$. Daher

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2\ BC.\ AD$$

oder, weil $BC.\ AD = AB.\ CD$ ist

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2\ AB.\ CD \text{ d. i.}$$
$$AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$$

wie zu beweisen war.

V) $\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right)$.

Beweis.

Aus $AB : BC = AD : CD$ folgt
$AB : AC - AB = AD : AD - AC$ mithin
$AB\ (AD - AC) = AD\ (AC - AB)$ oder
$2\ AB.\ AD = AD.\ AC + AB.\ AC.$

Digitized by Google

Dividirt man diese Gleichung durch
2AB. AD. AC, so erhält man

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right)$$

$$\text{VI)}\quad \frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{CD}\right)$$

Beweis.

Es ist:

$$AB : BC = AD : CD \text{ oder}$$
$$AC - BC : BC = AC + CD : CD \text{ folglich}$$
$$AC.\ CD - BC.\ CD = AC.\ BC + BC.\ CD \text{ oder}$$
$$2BC.\ CD = AC.\ CD - AC.\ BC.$$

Dividirt man diese Gleichung durch
2AC. BC. CD so erhält man:

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{CD}\right).$$

Lehrsatz XXXVI.

(Figur 31.)

Zieht man durch einen Punkt B eines harmonischen Strahles OB eine Parallele EF mit seinem zugeordneten Strahl OD, so sind die zwischen den beiden anderen zugeordneten Strahlen liegenden Theile dieser Parallelen einander gleich, d. h. es ist

$$EB = BF.$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke
AEB und AOD
BCF und OCD folgt:

$$\text{I)}\quad AB : AD = BE : DO$$
$$\text{II)}\quad BC : CD = BF : DO.$$

Nun ist aber

$$AB : BC = AD : CD \text{ folglich auch}$$
$$BE : BF = DO : DO \text{ mithin}$$
$$BE = BF$$

wie zu beweisen war.

Digitized by Google

Zusatz.

Sind die Strahlen OB und OD zu einander senkrecht, so ist auch OB zu EF senkrecht. Daraus folgt

$$\Delta\ EOB = \Delta\ FOB \text{ mithin auch}$$
$$\angle\ EOB = \angle\ FOB. \text{ Da nun auch}$$
$$\angle\ D'OB = \angle\ DOB \text{ so ist noch}$$
$$\angle\ D'OA = \angle\ DOC \text{ d. h.}$$

stehen von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete auf einander senkrecht, so bildet jeder derselben mit den beiden anderen gleiche Winkel.

Umgekehrt: Sind unter vier Strahlen zwei zu einander senkrecht und bildet jeder mit den beiden anderen gleiche Winkel, so sind diese vier Strahlen harmonische.

Zieht man nämlich BF mit OD parallel, so ist

$$\Delta\ OBE = \Delta\ OBF \text{ und daher}$$
$$BE = BF.$$

Ferner ist:

$$BE : OD = AB : AD \text{ und}$$
$$BF : OD = BC : CD \text{ folglich auch}$$
$$AB : BC = AD : CD \text{ d. h. die Punkte}$$
$$A, B, C, D$$

sind vier harmonische Punkte und daher

$$OA, OB, OC, OD$$

vier harmonische Strahlen.

Lehrsatz XXXVII.

(Figur 31.)

Jede Transversale, welche vier harmonischen Strahlen begegnet, wird von ihnen harmonisch getheilt, d. h. es ist, wie auch die ad gezogen ist, stets:

$$ab : bc = ad : cd.$$

Beweis.

Man ziehe durch b die Linie ef mit OD parallel, so ist nach Lehrsatz XXXVI

$$be = bf.$$

Digitized by Google

Ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

abe und aOd
bcf und Ocd

ab : ad = be : Od und
be : cd = bf : Od folglich auch
ab : bc = ad : cd

mithin die Linie ad harmonisch getheilt.

Erklärung.

(Figur 32).

Wenn man in einem beliebigen Viereck *ABCD* die gegenüberliegenden Seiten verlängert, bis sie in E und F zusammentreffen, so entsteht ein vollständiges Viereck *ABCDEF*. Dieses vollständige Viereck hat drei Diagonalen AC, BD und EF. Zudem enthält es drei einfache Vierecke *ABCD*, AECF und BEDF. Letzteres unterscheidet sich von der gewöhnlichen Form der Vierecke dadurch, daß zwei seiner gegenüberliegenden Seiten ED und BF sich schon auf den Seiten selbst, nicht in ihrer Verlängerung durchschneiden. Seine Diagonalen sind BD und EF.

Lehrsatz XXXVIII.

In jedem vollständigen Viereck ABCDEF theilen sich die Diagonalen gegenseitig in harmonische Theile, d. h. es ist:

EP : PF = EQ : FQ
AO : OC = AP : CP
BO : DO = BQ : DQ.

Beweis.

Da das Dreieck AEF von der Transversale BQ geschnitten wird, so ist nach Lehrsatz I:

(I) AB. EQ. FD = AD. EB. FQ

und weil sich in demselben Dreieck AEF die Transversalen AP, ED, BF in einem und demselben Punkt C durchschneiden, so ist nach Lehrsatz III:

(II) AB. EP. FD = AD. EB. FP.

Dividirt man (I) durch (II), so folgt

$$\frac{EQ}{EP} = \frac{FQ}{FP}$$ oder, was dasselbe ist,

EP : PF = EQ : FQ

folglich E, P, F, Q vier harmonische Punkte.

Digitized by Google

Denkt man sich noch AQ gezogen, so sind

AE, AP, AF, AQ vier harmonische Strahlen,

welche von BQ geschnitten, wieder vier harmonische Punkte erzeugen (Lehrsatz XXXVII). Diese vier harmonischen Punkte sind

B, O, D, Q.

Aus dem gleichen Grunde sind

EB, EO, ED, EQ vier harmonische Strahlen,

folglich ihre Durchschnitte mit AP oder die Punkte

A, O, C, P

wieder vier harmonische Punkte.

Es theilen sich also alle drei Diagonalen harmonisch, wie zu beweisen war.

Zusatz 1.

Zieht man noch die Geraden EO und FO, so werden dadurch sämmtliche Seiten des Vierecks harmonisch getheilt. Mithin hat man im Ganzen folgende harmonische Punkte:

A, J, B, E;
A, H, D, F;
B, G, C, F;
D, K, C, E;
A, O, C, P;
B, O, D, Q;
E, P, F, Q.

Zusatz 2.

Verbindet man die Punkte G, J, H, K mit einander, so schneiden sich die Verbindungslinien JG, KH in P und GK, JH in Q. Da nämlich AJOHEF ein vollständiges Viereck ist, das mit dem vollständigen Viereck ABCDEF die Diagonalen EF und AP gemeinschaftlich hat, so muß die erste dieser Diagonalen von den Diagonalen JH und BD in demselben Punkte Q geschnitten werden, da durch drei harmonische Punkte

E, P, F

auch der vierte Q bestimmt ist.

Eben so wird gezeigt, daß GK durch Q und GJ, KH durch P gehen.

Digitized by Google

Lehrsatz XXXIX.

(Figur 32).

Schneidet man ein beliebiges Viereck ABCD mit einer Transversale, so sind die vier Punkte M, N, P′, Q′, in welchen diese Transversale die Diagonalen AC, BD und die von den Durchschnittspunkten E, F der gegenüberliegenden Seiten durch den Durchschnittspunkt O der Diagonalen gezogenen Linien EO, FO trifft, harmonische Punkte.

Beweis.

Da A, J, B, E vier harmonische Punkte sind (Lehrsatz XXXVIII, Zusatz 1), so sind

OA, OJ, OB, OE vier harmonische Strahlen,

mithin ihr Durchschnitt mit jeder beliebigen Transversale P′Q′ vier harmonische Punkte. Diese Punkte sind aber

M, Q′, N, P′, folglich

$$NQ' : Q'M = NP' : MP'.$$

Lehrsatz XL.

(Figur 33.)

Wenn die Diagonalen eines vollständigen Vierecks ABCDEF von einer beliebigen Transversale ab (a′b′) in den Punkten a, b, c (a′, b′, c′) geschnitten werden und man sucht zu diesen Punkten die zugeordneten harmonischen, d. h. man bestimmt die Punkte a′, b′, c′ (a, b, c) so, daß

$$Aa : aC = Aa' : a'C$$
$$Bb : bD = Bb' : b'D$$
$$Ec : cF = Ec' : c'F$$

so liegen diese Punkte ebenfalls in gerader Linie.

Beweis.

Zufolge V der arithmetischen Eigenschaften der harmonischen Proportion (siehe den Anfang dieses Abschnitts) hat man:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{EP} + \frac{1}{EQ}\right) \text{ und eben so}$$

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ec} + \frac{1}{Ec'}\right) \text{ mithin}$$

Digitized by Google

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{EP}+\frac{1}{EQ}=\frac{1}{Ec}+\frac{1}{Ec'} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{EP}-\frac{1}{Ec}=\frac{1}{Ec'}-\frac{1}{EQ} \text{ folglich}$$

$$\frac{Ec-EP}{EP.\ Ec}=\frac{EQ-Ec'}{EQ.\ Ec'} \text{ d. i.}$$

$$\frac{Pc}{EP.\ Ec}=\frac{Qc'}{EQ.\ Ec'} \text{ oder}$$

$$\text{(II)}\quad Pc : Qc' = EP.\ Ec : EQ.\ Ec'.$$

Aus (I) folgt ferner:

$$\frac{1}{EP}-\frac{1}{Ec'}=\frac{1}{Ec}-\frac{1}{EQ} \text{ oder}$$

$$\frac{Ec'-EP}{EP.\ Ec'}=\frac{EQ-Ec}{EQ.\ Ec} \text{ d. i.}$$

$$\frac{Pc'}{EP.\ Ec'}=\frac{Qc}{EQ.\ Ec} \text{ also auch}$$

$$\text{(III)}\quad Pc' : Qc = EP.\ Ec' : EQ.\ Ec.$$

Multiplizirt man die Proportionen (II) und (III) in einander, so erhält man:

$$Pc.\ Pc' : Qc.\ Qc' = EP^2 : EQ^2. \text{ Eben so}$$

$$Qb.\ Qb' : Ob.\ Ob' = BQ^2 : BO^2 \text{ und}$$

$$Oa.\ Oa' : Pa.\ Pa' = AO^2 : AP^2.$$

Multiplizirt man diese drei Proportionen in einander, so erhält man

$$\text{(IV)}\quad Oa.\ Pc.\ Qb.\ Oa'.\ Pc'.\ Qb' : Ob.\ Pa.\ Qc.\ Ob'.\ Pa'.\ Qc' = \\ = OA^2.\ PE^2.\ QB_2 : OB^2.\ PA^2.\ QE^2.$$

Da aber das Dreieck OPQ sowohl von der Transversale ab, als von AB geschnitten wird, so ist nach Lehrsatz I:

$$Oa.\ Pc.\ Qb = Ob.\ Pa.\ Qc \text{ und}$$

$$OA.\ PE.\ QB = OB.\ PA.\ QE.$$

Substituirt man diese Werthe in (IV), so folgt

$$Oa'.\ Pc'.\ Qb' = Ob'.\ Pa'.\ Qc' \text{ d. h.}$$

die drei Punkte a', b', c' liegen in gerader Linie (Lehrs. II).

Lehrsatz XLI.

(Figur 34).

Die Durchschnittspunkte P, Q, M, N sämmtlicher Höhenperpendikel für die einzelnen Dreiecke AED, ABF, EBC, CDF, welche zu einem voll-

Digitized by Google

ständigen Viereck ABCDEF gehören, liegen stets in einer und derselben geraden Linie.

Beweis.

Da die Linie AE eine Transversale des Dreiecks abc ist, so hat man nach Lehrsatz I:

$$(I)\quad aA.\ cB.\ bE = aE.\ cA.\ bB$$

Ferner ist wegen der Parallelen

bc und AP
ac und ME
ab und BQ:

$$aP : bP = aA : cA$$
$$bM : cM = bE : aE$$
$$cQ : aQ = cB : bB.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder wegen der Gleichung (I) einander gleich; daraus folgt die Gleichheit der beiden letzten Glieder, d. h. es ist

$$aP.\ bM.\ cQ = aQ.\ bP.\ cM$$

und da M, P, Q sämmtlich auf den Seiten des Dreiecks abc liegen, so sind sie in gerader Linie (Lehrs. II). Eben so wird bewiesen, daß N in PQ liegt; folglich sind P, Q, M, N in gerader Linie.

Lehrsatz XLII.

(Figur 35, a, b, c.)

Wenn man in einem vollständigen Viereck ABCDEF aus dem Durchschnitt O zweier Diagonalen AC, BD Parallelen $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ mit den einzelnen Seiten AB, BC, CD, DA des Vierecks zieht und dieselben verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks treffen, so liegen:

1) Die vier Durchschnittspunkte α, β, γ, δ in einer geraden Linie, welche mit der dritten Diagonale EF parallel ist.
2) werden die beiden andern Seiten OP, OQ des Dreiecks OPQ, dessen Ecken die drei Durchschnittspunkte der Diagonalen sind, durch diese Gerade halbirt oder es ist

$$ON = NQ$$
$$OM = MP.$$

Digitized by Google

Beweis.

1) Da $O\alpha$ der AE, $O\delta$ der AD parallel gezogen ist, so ist

$AO : OC = E\alpha : C\alpha$ und
$AO : OC = F\delta : C\delta$ mithin auch
$E\alpha : C\alpha = F\delta : C\delta$ mithin
$\alpha\delta$ parallel mit EF.

Ferner ist

$O\alpha$ parallel mit BE
$O\beta$ parallel mit BF. Daher
$DO : BO = D\alpha : E\alpha$ und
$DO : BO = D\beta : F\beta$ mithin
$D\alpha : E\alpha = D\beta : F\beta$ folglich
$\alpha\beta$ parallel mit EF.

Endlich ist

$O\gamma$ parallel mit DE
$O\delta$ parallel mit DF. Daher
$BO : OD = B\gamma : E\gamma$
$BO : OD = B\delta : \delta F$ mithin
$B\gamma : E\gamma = B\delta : \delta F$ folglich
$\beta\gamma$ parallel mit EF.

Da also $\alpha\delta$, $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ sämmtlich mit EF parallel sind, so liegen die Punkte α, β, γ, δ in einer und derselben mit EF parallel gehenden Geraden.

2) Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$O\alpha N$ und $B\gamma N$
$D\alpha N$ und $O\gamma N$ folgt:
$ON : BN = O\alpha : B\gamma$
$ON : DN = O\gamma : D\alpha$ mithin

$$(I)\quad ON^2 : BN.\ DN = O\alpha.\ O\gamma : B\gamma.\ D\alpha.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$BO\gamma$ und $D\alpha$ O folgt aber:
$O\alpha : D\alpha = B\gamma : O\gamma$ mithin
$O\alpha.\ O\gamma = B\gamma.\ D\alpha.$

Aus der Gleichheit der letzten Glieder der Proportion (I) folgt die Gleichheit der ersten, d. h. es ist

$$ON^2 = BN.\ DN.$$

Daher N in der Mitte von OQ,

Digitized by Google

(Siehe II der arithmetischen Eigenschaften der harmonischen Proportion im Anfange dieses Abschnitts)

und weil NM parallel mit PQ, auch
M in der Mitte von OP.

Zusatz.

(Figur 35, b).

Aus diesem allgemeinen Satze folgt der spezielle Satz für das Dreieck:

Wenn man in einem Dreieck (ABD) die Höhenperpendikel (AO, BF, DE) zieht und aus dem Fußpunkte (O) eines dieser Höhenperpendikel (AO) Senkrechte (Oβ, Oγ, Oα, Oδ) auf die beiden anderen Seiten des Dreiecks und auf die beiden anderen Höhenperpendikel fällt, so liegen die vier Fußpunkte dieser neuen Senkrechten in einer geraden Linie.

(Siehe van Swindens Geometrie, übersetzt von Jacobi, Anhang zum vierten Buch 406).

Hülfssatz.

(Figur 36.)

Wenn man auf die eine Seite BC eines Dreiecks ABC in ihrer Mitte ein Perpendikel gleich der Höhe des Dreiecks errichtet und vom Endpunkt O dieses Perpendikels auf die beiden anderen Seiten AB, AC des Dreiecks Senkrechte fällt, sodann die Fußpunkte M, N dieser Senkrechten durch die Gerade MN verbindet, so geht diese gehörig verlängert durch die Mitte Q des ersten Perpendikels OP.

Beweis.

Man nehme Q in der Mitte von OP, so ist zu zeigen, daß Q, M, N in gerader Linie liegen.

Zu dem Ende ziehe man Qq mit BC und Aq mit OP parallel und verbinde A mit P durch die Gerade AP. Nun ist wegen Gleichheit der Dreiecke PQp und Apq

Qp = pq. Ferner ist
bp = pc also auch
Qp — bp = pq — pc oder
Qb = cq. Da nun auch

Digitized by Google

OQ = Aq, so sind die Dreiecke OQb und Acq einander gleich, mithin auch ∠ ObQ = ∠ Acq.

Da aber auch ∠ Acq = ∠ OAc so ist ∠ ObQ = ∠ OAc und daher das Viereck Oacb ein Viereck im Kreise. Fällt man daher von O auf die drei Seiten des Dreiecks Abc die Senkrechten OM, ON, OQ, so liegen deren Fußpunkte M, N, Q in gerader Linie (Lehrsatz XXXII).

Lehrsatz XLIII.

(Figur 37.)

Wenn man in einem vollständigen Viereck ABCDEF aus dem Durchschnittspunkt O zweier Diagonalen AC, BD ein Perpendikel auf die dritte Diagonale EF zieht und von dem Fußpunkte P dieses Perpendikels auf sämmtliche Seiten des Vierecks die Senkrechten PM, PN, PR, PS fällt, so schneiden sich die Verbindungslinien MN und RS derjenigen Fußpunkte dieser Senkrechten, welche auf je zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks ABCD liegen, stets in der Mitte Q der Senkrechten OP.

Beweis.

Man ziehe durch O die bc mit der dritten Diagonale EF parallel, so ist, weil

EA, EO, EC, EF und eben so

FA, FO, FC, FE vier harmonische Strahlen sind, nach Lehrsatz XXXVI:

$$bO = Oc$$
$$b'O = O'c.$$

Betrachtet man daher die Dreiecke bEc und Fb'c', deren gemeinschaftliche Höhe OP ist, so folgt aus dem vorhergehenden Hülfssatz die Richtigkeit unseres Lehrsatzes.

Lehrsatz XLIV.

Beschreibt man um die vier Dreiecke AED, ABF, BCE, CDF, aus welchen ein vollständiges Viereck ABCDEF besteht, Kreise, so finden folgende Beziehungen Statt:

Digitized by Google

1) Die vier um die einzelnen Dreiecke beschriebenen Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkt P.

2) Fällt man von diesem Punkt P auf die einzelnen Seiten des Vierecks Perpendikel, so liegen die Fußpunkte M, N, R, S derselben in gerader Linie.

3) Die von dem Punkt P auf je zwei gegenüberliegende Seiten gefällte Perpendikel verhalten sich zu einander, wie die Seiten des Vierecks *ABCD*, auf welchen sie senkrecht stehen, d. h. es ist

$$PM : PN = AB : CD$$
$$PS : PR = AD : BC.$$

Beweis.

1) Der Durchschnitt der um die Dreiecke ADE und *ABF* beschriebenen Kreise sei in P, so ist zu zeigen, daß die Punkte B, C, E, P, so wie die Punkte C, D, F, P im Umfange eines Kreises liegen.

Zu dem Ende ziehe man AP, BP und EP, dann ist

$\angle$ PAF $=$ $\angle$ PBF $=$ $\frac{1}{2}$ arc. PF. Aber auch

$\angle$ PAF $=$ $\angle$ PED $=$ $\frac{1}{2}$ arc. PD. Daher

$\angle$ PBF $=$ $\angle$ PED oder, was dasselbe ist

$\angle$ PBC $=$ $\angle$ PEC, mithin läßt sich um P, E, B, C ein Kreis beschreiben oder der um EBC beschriebene Kreis geht durch den Punkt P. Eben so wird gezeigt, daß der um CDF beschriebene Kreis durch P geht, es schneiden sich also alle vier Kreise in einem und demselben Punkt.

2) Man verbinde die Fußpunkte M und S durch die Gerade MS, welche die CD und *BC* in N und R schneidet; dann ist zu zeigen, daß $\angle$ *CNP* $=$ $\angle$ *CRP* $= 90°$ ist.

Nun ist aber *AMPS* ein Viereck im Kreise, folglich

$\angle$ PAS $=$ $\angle$ PMS und weil auch

$\angle$ PAS $=$ $\angle$ PEN $=$ $\frac{1}{2}$ arc. DP, so ist

$\angle$ PMS $=$ $\angle$ PEN, mithin läßt sich um das Viereck EMNP ein Kreis beschreiben; und es ist:

$\angle$ ENP $=$ $\angle$ EMP $= 90°$ oder die PN steht senkrecht auf *CD*. Eben so wird gezeigt, daß PR senkrecht auf *BC* steht.

3) Zieht man noch die Geraden *CP*, DP, FP, so ist

$\angle$ *CPD* $=$ $\angle$ *CFD* $=$ $\angle$ *AFB* $=$ $\angle$ *APB* und

$\angle$ *CDP* $=$ $\angle$ *CFP* $=$ $\angle$ *BFP* $=$ $\angle$ *BAP*

Digitized by Google

folglich die Dreiecke *CPD* und *ABP* einander ähnlich. Daraus folgt:

$\triangle$ *CPD* : $\triangle$ *ABP* = *CD*² : *AB*². Aber es ist auch

$\triangle$ *CPD* : $\triangle$ *ABP* = *CD*. PN : *AB*. PM

folglich

*CD*² : CD. PN = *AB*² : *AB*. PM oder

CD : PN = *AB* : PM oder auch

PM : PN = AB : CD

Eben so folgt

PS : PR = AD : BC.

Lehrsatz XLV.

(Figur 39).

Verlängert man in einem dem Kreis einbeschriebenen Viereck *ABCD* die einzelnen Seiten AB, CD so wie BC, AD, bis sie sich in E und *F* durchschneiden, so finden folgende Beziehungen Statt:

1) Der Durchschnittspunkt P der einzelnen um die vier Dreiecke *AED*, *ABF*, *BCE*, *CDF* beschriebenen Kreise liegt in der dritten Diagonale *EF*.

2) Verbindet man den Durchschnitt O der beiden Diagonalen *AC* und BD mit dem Punkt P, so ist OP senkrecht zu EF.

3) Verbindet man den Punkt P mit den Endpunkten der einzelnen Diagonalen, so sind die Rechtecke aus je zwei zusammengehörigen Verbindungslinien sämmtlich einander gleich, d. h. es ist

PA. PC = PB. PD = PE. PF.

Beweis.

1) Der um *CDF* beschriebene Kreis schneide die *EF* in P, so ist zu zeigen, daß der um irgend ein anderes der vier einzelnen Dreiecke beschriebene Kreis ebenfalls durch P geht.

Nun ist

$\angle$ BAD + $\angle$ BCD = 2 R (wo R = 90°)

$\angle$ PCD + $\angle$ D*F*P = 2 R folglich

$\angle$ BAD + $\angle$ D*F*P + $\angle$ BCD + PCD = 4 R.

Aber es ist auch

$\angle$ BCP + $\angle$ BCD + $\angle$ PCD = 4 R und daher

$\angle$ BCP = $\angle$ BAD + $\angle$ D*F*P.

Digitized by Google

rende und dem Punkt K zugeordnete harmonische Punkt auf MN. Da aber EF, AB und CD parallel sind, so hat man:

$$EJ : JF = AK : KB \text{ und}$$
$$EJ : JF = CL : LD \text{ mithin auch}$$
$$AK : KB = CL : LD, \text{ d. h.}$$

wenn man KL zieht, so geht diese Linie gehörig verlängert durch P.

Denkt man sich nun den vierten zu PA, PK, PB gehörenden und dem Strahl PK zugeordneten harmonischen Strahl, so geht derselbe nicht nur durch P, sondern auch durch die entsprechenden zu C, L, D und A, K, B gehörenden vierten harmonischen Punkte, welche beide, wie wir so eben gesehen, auf MN liegen. Daraus aber folgt, daß P selbst auf MN liegt; es liegen mithin die Punkte M, N, P in gerader Linie.

Zusatz.

(Figur 41, a und b.)

Aus diesem Satze folgt:

1) Wenn zwei Dreiecke NAB und PAB dieselbe Grundlinie AB haben und man zieht in beiden Dreiecken die Linien EF und CD mit der gemeinschaftlichen Grundlinie parallel, so treffen sich die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Endpunkte in einem und demselben Punkt M der Linie NP, welche die Spitzen beider Dreiecke verbindet.

(Figur 42, a. und b.)

2) Wenn man in einem beliebigen Viereck ABCD zwei Transversalen EF und GH mit der einen Diagonale BD parallel zieht, so laufen die Verbindungslinien EG und FH der entsprechenden Endpunkte dieser Linien stets in einem und demselben Punkt O der anderen Diagonale AC zusammen.

Lehrsatz XLVIII.

(Figur 43, a und b.)

Wenn man die Endpunkte dreier paralleler Linien AB, CD, EF je zwei und zwei von innen (kreuzweise) oder auch ein Paar von innen und die beiden anderen Paare von Außen verbindet, so haben die Durch-

Digitized by Google

schnittspunkte M, N, P eine solche Lage, daß, wenn man aus der Mitte jeder der drei Parallelen die Linien QN, RP, MS nach den entsprechenden Durchschnittspunkten N, P, M zieht, diese drei Linien sich in einem und demselben Punkte Q durchschneiden.

Beweis.

Man verbinde die Mitten der Parallelen durch die Geraden QS, QR, RS, welche einzeln durch die Punkte M, N, P gehen. Dann ist

$$MR : MQ = FR : CQ$$
$$NS : NR = AS : FR$$
$$PQ : PS = CQ : BS$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden wegen AS = BS die letzten Glieder einander gleich; mithin ist auch

$$MR.\ NS.\ PQ = MQ.\ NR.\ PS.$$

Da aber die Punkte M, N, P einzeln auf den Seiten des Dreiecks RQS liegen, so schneiden sich die Linien QN, RP, MS in einem und demselben Punkt. (Lehrsatz IV).

Lehrsatz XLIX.

(Figur 33.)

Verlängert man in einem Viereck ABCD die gegenüberliegenden Seiten, bis sie sich in E und F treffen, so ist immer:

$$AB.\ AD : BC.\ CD = AE.\ AF : CE.\ CF.$$

Beweis.

Betrachtet man AF als Transversale des Dreiecks BCE und AE als Transversale des Dreiecks CDF, so ist nach Lehrsatz I:

$$AB.\ CF.\ ED = BF.\ CD.\ EA \text{ und}$$
$$DA.\ CE.\ FB = DE.\ CB\ \ FA.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

$$AB.\ AD.\ CE.\ CF = BC.\ CD.\ AE.\ AF \text{ also auch}$$
$$AB.\ AD : BC.\ CD = AE.\ AF : CE.\ CF.$$

Digitized by Google

Zusatz.

Da

$$\triangle ABD : \triangle AEF = AB.\ AD : AE.\ AF \text{ und}$$
$$\triangle BCD : \triangle CEF = BC.\ CD : CE.\ CF$$

so folgt:

$$\triangle ABD : \triangle AEF = \triangle BCD : \triangle ECF.$$

Lehrsatz L.

(Figur 44, a, und b.)

Wenn man auf der Diagonale BD eines Vierecks ABCD einen beliebigen Punkt M nimmt und von diesem Punkt durch das Viereck zwei Transversalen zieht, welche je zwei anliegende Seiten des Vierecks oder auch ihre Verlängerungen treffen, so wird dadurch jede Seite in zwei solche Abschnitte getheilt, daß das Produkt aus vier nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt der vier anderen, d. h.

$$AE.\ BF.\ CG.\ DH = AH.\ BE.\ CF.\ DG.$$

Beweis.

Betrachtet man MH als Transversale des Dreiecks ABD, MG als Transversale des Dreiecks BCD, so ist nach Lehrsatz I:

$$AE.\ BM.\ DH = AH.\ BE.\ DM \text{ und}$$
$$BF.\ CG.\ DM = BM.\ CF.\ DG.$$

Multiplizirt man diese beiden Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man

$$AE.\ BF.\ CG.\ DH = AH.\ BE.\ CF.\ DG.$$

Lehrsatz LI.

(Figur 44, a und b).

Umgekehrt, wenn jede Seite eines Vierecks in zwei solche Abschnitte getheilt ist, daß das Produkt aus vier nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt der vier anderen, so treffen die Verbindungslinien von je zwei und zwei anliegenden Theilpunkten (d. h. solchen

Digitized by Google

Theilpunkten, welche auf anstoßenden Seiten liegen) in einem und demselben Punkt M, N der Diagonalen BD, AC zusammen.

Beweis.

Die Linie FG treffe die Diagonale BD in M, und ME verlängert treffe die AD in H', so ist zu zeigen, daß H' mit H zusammenfällt.

Nun ist vermöge Lehrsatz L:

$$AE.\ BF.\ CG.\ DH' = AH'.\ BE.\ CF.\ DG.$$

Nach der Voraussetzung aber ist

$$AE.\ BF.\ CG.\ DH = AH.\ BE.\ CF.\ DG$$

folglich, wenn man beide Gleichungen in einander dividirt:

$$\frac{DH'}{DH} = \frac{AH'}{AH} \text{ oder,}$$

$AH' : DH' = AH : DH$ folglich auch

$AH' : AH' + DH' = AH : AH + DH$ d. i.

$AH' : AD = AH : AD$

mithin $AH' = AH$.

Folglich fällt H' mit H zusammen oder es treffen die Verbindungslinien EH und FG die Diagonale BD in einem und demselben Punkt M. Eben so wird gezeigt, daß EF und GH in einem und demselben Punkt N der Diagonale AC zusammenlaufen.

Zusatz 1.

Aus der Verbindung der Lehrsätze L und LI folgt:

Zieht man von einem Punkt M der Diagonale BD eines Vierecks zwei Transversalen ME, MF, welche die Seiten des Vierecks einzeln in den Punkten E, H, F, G durchschneiden, so laufen die Verbindungslinien EF und GH von den zwei andern Paaren anliegender Theilpunkte in einen Punkt N der anderen Diagonale zusammen. (Vergleiche auch Lehrsatz XII).

Zusatz 2.

Die Durchschnittspunkte M und N können beide oder auch nur einer von ihnen in unendlicher Entfernung liegen. Ersteres ist der Fall, wenn die Theilpunkte auf der Mitte jeder Viereckseite genommen werden; letzteres tritt ein, wenn zwei an einander liegende Seiten von ihrer gemeinschaftlichen Spitze aus in gleichem Verhältniß getheilt sind.

Digitized by Google

Zusatz 3.

(Figur 45.)

Ist das Viereck ABCD ein Paralleltrapez, und das einbeschriebene Viereck NVMW wird so bestimmt, daß die eine seiner Diagonalen durch den Durchschnittspunkt O der Haupt-Diagonalen geht, so ist die dritte Diagonale PQ des einbeschriebenen Vierecks stets mit den parallelen Seiten des ursprünglichen Trapezes parallel.

Beweis.

Verlängert man die MV und MW, bis sie die CD in β und α, und die Linie AB, bis sie die NP und NQ in δ und γ treffen, so ist:

$$ND : D\beta = A\gamma : AM$$
$$A\gamma : AM = CN : C\alpha \text{ folglich auch}$$
$$ND : D\beta = CN : C\alpha \text{ oder}$$
$$\text{(I) } ND : CN = D\beta : C\alpha. \text{ Aber es ist auch}$$
$$MB : ND = MO : ON = AM : CN \text{ oder}$$
$$\text{(II) } ND : CN = MB : MA.$$

Aus Verbindung von (I) und (II) folgt

$$\text{(III) } MB : D\beta = MA : C\alpha.$$

Ferner ist:

$$PB : PD = BM : D\beta \text{ und}$$
$$QA : QC = AM : C\alpha$$

mithin auch, weil nach (III) die beiden letzten Verhältnisse gleich sind:

$$PB : PD = QA : QC.$$

Da nun AB mit CD parallel ist, so ist auch PQ mit AB und CD parallel.

Zusatz 4.

(Figur 46.)

Ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm und man zieht durch einen beliebigen Punkt O im Innern zwei Parallelen EG und FH mit den einzelnen Seiten des Parallelogramms, so entstehen vier kleinere Parallelogramme, in welchen die nicht durch den Punkt O gehenden Diagonalen je zwei und zwei in demselben Punkt M, N der Hauptdiagonalen BD, AC zusammenlaufen. Da nämlich

Digitized by Google

AH : HD = BF : CF
BE : AE = CG : DG so ist auch
AH. BE. CF. DG = AE. BF. CG. DH

mithin dieser Satz auf den Hauptsatz zurückgeführt.

Zusatz 5.

(Figur 44, a. und b.)

Aus unserem Lehrsatze folgt ferner:

Wenn man auf drei von einem und demselben Punkt auslaufenden Linien MH, MD, MG die Abschnitte EH, BD und FG beliebig nimmt und die Endpunkte dieser Abschnitte je zwei und zwei entweder sämmtlich von Außen oder ein Paar von Außen und die beiden anderen Paare von innen (kreuzweise) verbindet, so liegen die Punkte C, *A*, N, in welchen diese Verbindungslinien zusammentreffen, in gerader Linie. — Dies ist zugleich eine Verallgemeinerung des Lehrsatzes XLVII, wo die drei Linien AB, CD, EF (siehe Fig. 41, a u. b) von einem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte ausgehend gedacht werden können.

Lehrsatz LII.

(Figur 45, b.)

Wenn zwei Vierecke ABCD und abcd so in und um einander beschrieben sind, daß sich ihre Diagonalen in einem und demselben Punkt O durchschneiden, so liegen die vier Durchschnittspunkte E, F, e, f ihrer gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie.

Beweis.

Da die Verbindungslinien der Ecken der Dreiecke

Aad und Cbc
Bab und Ddc

sich in einem und demselben Punkt durchschneiden, so liegen nach Lehrsatz XII sowohl die Punkte

E, F, f als
E, F, e

mithin auch alle vier Punkte

E, F, f, e

in gerader Linie.

Digitized by Google

Lehrsatz LIII.

(Figur 47.)

In einem vollständigen Viereck ABCDEF liegen die Mitten M, N, P der einzelnen Diagonalen in gerader Linie.

Beweis 1.

(Figur 47, a.)

Man ziehe durch P und N mit BF und ED die Parallelen PJ, PK, NJ, NK, welche sich in J und K, den Mitten von BE und DF, treffen und dadurch ein Parallelogramm PJNK bestimmen, in welchem PN die eine Diagonale ist und welches durch die mit seinen Seiten parallelen Geraden GQ und LH in vier kleinere Parallelogramme getheilt wird. Zieht man nun in den Parallelogrammen CGKH und LJQC die Diagonalen HG und QL, so treffen diese, wenn sie verlängert werden, die Diagonale NP in einem und demselben Punkt (Lehrsatz LI, Zusatz 4). Da nun, wie leicht zu sehen, G die Mitte von CD, H die Mitte von CF ist, so ist GH parallel AF und trifft mithin die Linie AC in ihrer Mitte M. Eben so geht, weil Q in der Mitte von EC, L in der Mitte von BC liegt, die mit AE parallele QL durch die Mitte von AC; folglich ist es dieser in der Mitte von AC gelegene Punkt M, in welchem die Linien GH und QL zusammenlaufen, und da sie sich auch auf einem Punkt der verlängerten PN treffen müssen, so geht PN selbst durch M, oder es liegen die Punkte P, N, M in gerader Linie.

Beweis 2.

(Figur 47, b.)

Man verlängere die drei Diagonalen, bis sie sich in O, Q, R durchschneiden; dann sind vermöge Lehrsatz XXXVIII die Punkte

A, O, C, R
E, R, F, Q
B, O, D, Q

harmonische Punkte, und da AC in M, EF in P, BD in N halbirt ist, so hat man zufolge III der arithmetischen Eigenschaften der harmonischen Proportion:

$$OM : RM = CO^2 : CR^2$$
$$RP : QP = RF^2 : QF^2$$
$$QN : ON = DQ^2 : DO^2.$$

Digitized by Google

Da sich aber nach Lehrsatz XII die Linien FO, DR, CQ in einem und demselben Punkt durchschneiden, so ist

CO. RF. DQ = CR. QF. DO.

Multiplizirt man daher die drei obigen Proportionen, so werden die beiden letzten Glieder einander gleich, mithin ist auch:

OM. RP. QN = ON. RM. QP oder

es liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie (Lehrsatz II).

Anmerkung.

Einen andern einfachen Beweis dieses Lehrsatzes siehe in Kunze's schätzbarem Lehrbuch der Geometrie (Jena 1842) Seite 200.

Zusatz.

(Figur 47, a.)

Da nach Lehrsatz XLI, Zus. 4, die Linien GL und HQ in demselben Punkt der verlängerten JK zusammenlaufen, so folgt ganz allgemein:

Wenn man in einem beliebigen Viereck BEFD die Mitten L, G, H, Q der einzelnen Abschnitte seiner Diagonalen mit einander verbindet, so entsteht ein neues dem ersten ähnliches Viereck LGHQ, dessen gegenüberliegende Seiten auf den Halbirungslinien der gegenüberliegenden Seiten des ursprünglichen Vierecks zusammenlaufen.

---

b. Die Involution.

Erklärung.

Wenn sechs Punkte in gerader Linie liegen und je zwei entsprechende, wie:

a und a′
b und b′
c und c′

solche Abschnitte bilden, daß man die Proportion hat:

ab. ab′ : ac. ac′ = a′b. a′b′ : a′c. a′c′,

so sagt man, diese sechs Punkte sind in Involution und zwar heißen die Punkte a und a′ so wie b und b′, und c und c′ zugeordnete (conjugirte) Punkte.

Digitized by Google

Lehrsatz LIV.

(Figur 48.)

Wenn die Seiten und Diagonalen eines Vierecks von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, so sind die sechs Durchschnittspunkte a, a′, b, b′, c, c′, von denen die beiden ersten auf zwei gegenüberliegenden Seiten, die beiden folgenden auf den zwei andern gegenüberliegenden Seiten und die beiden letzten auf den Diagonalen genommen werden, in Involution.

Beweis.

Betrachtet man AF und BF, AC und BD nacheinander als Transversalen des Dreiecks Eaa′, so hat man nach Lehrsatz I:

$$EA.\ ab'.\ a'D = ED.\ aA.\ a'b' \text{ und}$$
$$EB.\ ab.\ a'C = EC.\ aB.\ a'b \text{ folglich}$$

durch Multiplikation:

$$(I)\quad EA.\ EB.\ ab.\ ab'.\ a'C.\ a'D = EC.\ ED.\ aA.\ aB.\ a'b'.\ a'b.$$

Ferner:

$$EA.\ ac.\ a'C = EC.\ aA.\ a'c \text{ und}$$
$$EB.\ ac'.\ a'D = ED.\ aB.\ a'c' \text{ mithin}$$

durch Multiplikation:

$$(II)\quad EA.\ EB.\ ac.\ ac'.\ a'C.\ a'D = EC.\ ED.\ aA.\ aB.\ a'c.\ a'c'.$$

Dividirt man (I) durch (II), so erhält man

$$\frac{ab.\ ab'}{ac.\ ac'} = \frac{a'b.\ a'b'}{a'c.\ a'c'} \text{ oder}$$
$$ab.\ ab' : ac.\ ac' = a'b.\ a'b' : a'c.\ a'c'.$$

Zusatz 1.

Auf gleiche Weise, wie die bereits gefundene, erhält man noch die beiden folgenden Proportionen:

$$ba.\ ba' : bc.\ bc' = b'a.\ b'a' : b'c.\ b'c'$$
$$ca.\ ca' : cb.\ cb' = c'a.\ c'a' : c'b.\ c'b'.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und mit der Proportion:

$$ab.\ ab' : ac.\ ac' = a'b.\ a'b' : a'c.\ a'c'$$

und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

$$ab^2.\ ca' : a'b'^2.\ c'a = bc^2.\ c'a : b'c'^2.\ ca'.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$ab^2 . ca'^2 . b'c'^2 = a'b'^2 . c'a^2 . bc^2$ oder wenn man die Wurzel auszieht:

$$ab . b'c' . ca' = a'b' . bc . c'a.$$

Eben so erhält man:

$$ab . b'c . c'a' = a'b' . bc' . ca$$
$$ab' . bc' . ca' = a'b . b'c . c'a \text{ und}$$
$$ab' . bc . c'a' = a'b . b'c' . ca.$$

Zusatz 2.

(Figur 49.)

Fallen zwei zugeordnete Punkte c und c' in einen Punkt O zusammen, wo O der Durchschnittspunkt der Diagonalen ist, so hat man die Involution von fünf Punkten.

O ist hier ein doppelter Punkt und die fragliche Involution stellt sich also dar:

$$ab . ab' : aO^2 = a'b' . a'b : a'O^2 \text{ oder}$$
$$ab . ab' : a'b . a'b' = aO^2 : a'O^2.$$

Eben so

$$ba . ba' : b'a . b'a' = bO^2 : b'O^2 \text{ und}$$
$$ab . Oa' . Ob' = a'b' . Oa . Ob$$
$$ab' . Oa' . Ob = a'b . Oa . Ob'.$$

Zusatz 3.

Betrachtet man EF als Transversale, so erhält man Lehrsatz XXXVIII. In diesem Fall hat man nämlich für a und a' den Punkt E, für b und b' den Punkt F, für c den Punkt P (siehe Figur 32) und für c' den Punkt Q. Substituirt man nämlich diese Punkte den entsprechenden in Figur 49, so wird die Gleichung

$$ab . b'c . c'a' = a'b' . bc' . ca$$

folgende Gestalt annehmen:

$$EF . FP . QE = EF . FQ . PE.$$

Es ist also

$$FP . EQ = EP . FQ \text{ oder}$$
$$EP : PF = EQ : FQ$$

was der Lehrsatz XXXVIII ist.

Digitized by Google

Zusatz 4.

(Figur 50.)

Liegt einer der sechs Punkte in unendlicher Entfernung, so erhält man wieder eine Involution von fünf Punkten. Dies ist der Fall, wenn die Transversale mit einer Seite oder Diagonale des Vierecks (in Figur 50 mit BD) parallel gezogen wird. Wir bezeichnen hier den unendlich entfernten Punkt mit Q′ und nennen dessen zugeordneten Punkt Q den Centralpunkt der Systeme a, a′, b, b′. Da hier wegen der unendlichen Entfernung des Punktes Q′ die Größen Q′a, Q′a′, Q′b, Q′b′ einander gleich werden, so folgt aus der obigen Relation:

$$ca.\ ca' : cb.\ cb' = c'a.\ c'a' : c'b.\ c'b'$$

wegen Gleichheit der letzten Glieder

$$Qa.\ Qa' = Qb.\ Qb'.$$

Eben so erhält man:

$$ab.\ ab' : a'b.\ a'b' = aQ : a'Q \text{ und}$$
$$ba.\ ba' : b'a.\ b'a' = bQ : b'Q.$$

Ferner aus Zusatz I:

$$ab.\ Qa' = a'b'\ Qb$$
$$ab.\ Qb' = a'b'\ Qa$$
$$ab'.\ Qa' = a'b.\ Qb'$$
$$ac'.\ Qb = a'b.\ Qa$$

oder, wenn man aus diesen Gleichungen Proportionen macht:

$$ab : a'b' = Qb : Qa'$$
$$ab : a'b' = Qa : Qb'$$
$$ab' : a'b = Qb' : Qa'$$
$$ab' : a'b = Qa : Qb.$$

Zieht man durch E die Linie Ef parallel mit BD, so fallen die Punkte a, a′ in einen Punkt E zusammen; statt b und b′ erhält man die Punkte f und f′ und daher verwandelt sich die Relation: Qa. Qa′ = Qb. Qb′ in die folgende:

$$pE^2 = pf.\ pf' \text{ d. h. es ist}$$
$$pf : pE = pE : pf'.$$

Eben so hat man, wenn aus F die *Fe* parallel mit BD gezogen wird:

$$p'F^2 = p'e.\ p'e' \text{ oder}$$
$$p'e : p'F = p'F : p'e'.$$

Digitized by Google

Zusatz 5.

(Figur 51).

Zieht man durch den Doppelpunkt O eine Parallele mit einer der Vierecksseiten CD, so folgt aus Zusatz 2:

$$Oa^2 = ab.\ ab' \text{ oder}$$
$$ab : aO = aO : ab'. \text{ Ferner}$$
$$ab : ab' = bO^2 : b'O^2$$
$$ab : aO = bO : b'O$$
$$ab' : aO = b'O : bO.$$

Lehrsatz LV.

(Figur 52).

Beschreibt man um ein beliebiges Dreieck ABC einen Kreis und zieht durch eine Ecke A des Dreiecks an den Kreis eine Tangente AD, sodann aber eine beliebige Transversale, welche die anliegenden Seiten AB, AC des Dreiecks in a, a', die Seite BC und die gegenüberliegenden Tangente in b, b', endlich den Kreisumfang in c, c' trifft, so sind die genannten Durchschnittspunkte a, a', b, b', c, c' in Involution.

Beweis.

Betrachtet man die Linien AB und AC als Transversalen des Dreiecks Dbb', so ist nach Lehrsatz I:

$$DA.\ bB.\ b'a = DB.\ ba.\ b'A$$
$$DA.\ bC.\ b'a' = DC.\ ba'.\ b'A$$

folglich auch, wenn man multiplizirt:

$$(I)\ DA^2.\ bB.\ bC.\ b'a.\ b'a' = DB.\ DC.\ ba.\ ba'.\ b'A^2$$

Nun ist aber

$$DA^2 = DB.\ DC$$
$$bB.\ bC = bc.\ bc' \text{ und}$$
$$b'A^2 = b'c.\ b'c'.$$

Substituirt man diese Werthe in (I) und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

$$bc.\ bc'.\ b'a.\ b'a' = ba.\ ba'.\ b'c.\ b'c'.$$

Digitized by Google

Also ist auch

$$ba.\ ba' : bc.\ bc' = b'a.\ b'a' : b'c.\ b'c'.$$

Eben so erhält man:

$$ab.\ ab' : ac.\ ac' = a'b.\ a'b' : a'c.\ a'c' \text{ und}$$
$$ca.\ ca' : cb.\ cb' = c'a.\ c'a' : c'b.\ c'b'.$$

Aus diesen drei Proportionen folgen noch folgende vier Relationen:

$$ab.\ b'c'.\ ca' = a'b'.\ bc\ \ c'a$$
$$ab.\ b'c.\ c'a' = a'b'.\ bc'\ ca$$
$$ab'.\ bc'.\ ca' = a'b.\ b'c.\ c'a$$
$$ab'.\ bc.\ c'a' = a'b.\ b'c'.\ ca.$$

Siehe Lehrsatz LIII, Zusatz 1.

Zusatz 1.

Berührt die Transversale den Kreis statt ihn zu schneiden, so fallen die Punkte c, c′ in einen Punkt *O* zusammen und man erhält dieselben Relationen, welche in Lehrsatz LIV, Zusatz 2 entwickelt sind.

Eben so wird, wenn man $\alpha\gamma$ parallel mit BC zieht, Q der Centralpunkt der Systeme α, α', γ, γ', d. h. man erhält:

$$Q\alpha.\ Q\alpha' = Q\gamma.\ Q\gamma'$$
$$\alpha\gamma : \alpha'\gamma' = Q\gamma : Q\alpha'$$
$$\alpha\gamma : \alpha'\gamma' = Q\alpha : Q\gamma'$$
$$\alpha\gamma' : \alpha'\gamma = Q\gamma' : Q\alpha'$$
$$\alpha\gamma' : \alpha'\gamma = Q\alpha : Q\gamma.$$

Aus

$$QA^2 = Q\gamma.\ Q\gamma' = Q\alpha.\ Q\alpha'$$

folgt:

Zieht man in einem Dreieck ABC eine Parallele $\alpha\alpha'$ mit einer seiner Seiten BC, so liegt der Mittelpunkt des um das kleinere Dreieck $A\alpha\alpha'$ beschriebenen Kreises stets in dem Radius ZA, welcher vom Mittelpunkt des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises zur gemeinschaftlichen Ecke A gezogen ist.

Zusatz 2.

(Figur 53.)

Geht die Transversale durch D, so fallen die Punkte b und b′ mit D zusammen; der Punkt D ist mithin ein doppelter Punkt und man hat nach Lehrsatz LIII, Zusatz 2:

Digitized by Google

$$\text{(I) ac. ac}' : \text{a}'\text{c. a}'\text{c}' = \text{aD}^2 : \text{a}'\text{D}^2$$
$$\text{(II) ca. ca}' : \text{c}'\text{a. c}'\text{a}' = \text{cD}^2 : \text{c}'\text{D}^2$$

Berührt die Transverſale zugleich den Kreis, ſo fallen die Punkte c, c′ mit γ zuſammen und man hat:

$$\alpha\gamma^2 : \alpha'\gamma^2 = \alpha\text{D}^2 : \alpha'\text{D}^2 \text{ mithin auch}$$
$$\alpha\gamma : \alpha'\gamma = \alpha\text{D} : \alpha'\text{D},$$

d. h. die Punkte

$$\alpha,\ \gamma,\ \alpha',\ \text{D}$$

ſind vier harmoniſche Punkte, folglich

$$\text{A}\alpha,\ \text{A}\gamma,\ \text{A}\alpha',\ \text{AD}$$

vier harmoniſche Strahlen und deßhalb auch

$$\text{a},\ \text{D}',\ \text{a}',\ \text{D}$$

vier harmoniſche Punkte, d. h. es iſt:

$$\text{aD} : \text{a}'\text{D} = \text{aD}' : \text{a}'\text{D}'.$$

Subſtituirt man dies Verhältniß in (I), ſo erhält man:

$$\text{III) ac. ac}' : \text{a}'\text{c. a}'\text{c}' = \text{aD}'^2 : \text{a}'\text{D}'^2.$$

Setzt man ſtatt des Dreieckes ABC das Dreieck Acc′, ſo ſind nach dem Vorhergehenden

$$\text{Ac},\ \text{AD}',\ \text{Ac}',\ \text{AD}$$

vier harmoniſche Strahlen, d. h. es iſt:

$$\text{cD} : \text{c}'\text{D} = \text{cD}' : \text{c}'\text{D}'.$$

Subſtituirt man dies Verhältniß in (II), ſo erhält man

$$\text{(IV) ca. ca}' : \text{c}'\text{a. c}'\text{a}' = \text{cD}'^2 : \text{c}'\text{D}'^2.$$

Aus (III) und (IV) folgt, daß die Punkte

$$\text{a},\ \text{a}',\ \text{c},\ \text{c}'.\ \text{D}'$$

aus (*I*) und (*II*), daß

$$\text{a},\ \text{a}',\ \text{c},\ \text{c}'\ \text{D}$$

in Involution ſind. — Darum heißen die Punkte D, D′ zugeordnete (conjugirte) Punkte.

Lehrſatz LVI.

(Figur 54).

Wenn die Seiten eines Kreis-Vierecks von einer beliebigen Transverſale geſchnitten werden, ſo ſind die ſechs Durchſchnittspunkte a, a′, b, b′, d, d′, von denen die beiden erſten auf zwei gegenüberliegenden Sei-

Digitized by Google

ten, die beiden folgenden auf den zwei anderen gegenüberliegenden Seiten und die beiden letzten auf dem Kreise genommen werden, in Involution.

Beweis.

Betrachtet man den Kreis als Transversale des Dreiecks Eaa′, so ist nach Lehrsatz XXXIII:

EC. ED. aA. aB. a′d. a′d′ = EA. EB. ad. ad′. a′C. a′D.

Aber es ist auch zufolge Lehrsatz LIV, Beweis (I)

EC. ED. aA. aB. a′b. a′b′ = EA. EB. ab. ab′. a′C. a′D.

Dividirt man diese beiden Gleichungen in einander, so erhält man:

$$\frac{a'd.\ a'd'}{a'b.\ a'b'} = \frac{ad.\ ad'}{ab.\ ab'}$$ also ist auch

ab. ab′ : ad. ad′ = a′b. a′b′ : a′d. a′d′.

Zusatz 1.

Bezeichnet man die Durchschnittspunkte der Transversale mit den Diagonalen des Vierecks durch c, c′, so erhält man nach Lehrsatz LIII:

ab. ab′ : ac. ac′ = a′b. a′b′ : a′c. a′c′.

Da nun auch

ab. ab′ : ad. ad′ = a′b. a′b′ : a′d. a′d′

so folgt:

ac. ac′ : ad. ad′ = a′c. a′c′ : a′d. a′d′

mithin sind auch die Punkte

a, a′, c, c′, d, d′

in Involution. Daraus folgt allgemein:

Hat man auf einer geraden Linie mehrere Systeme von Punkten, von welchen zwei mit jedem der anderen eine Involution bilden, so bilden auch beliebige drei dieser Systeme unter sich eine Involution.

Ferner ist nach Lehrsatz LIII, Zus. 1

ab′. bc. a′c′ = a′b. b′c′. ac folglich auch

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} \cdot \frac{ab'}{a'b.}$$ Eben so

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a'd'}{b'd'} \cdot \frac{ab'}{a'b.}$$

Folglich auch, wenn man dividirt:

$$\frac{ac}{bc} \cdot \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} \cdot \frac{a'd'}{b'd'}$$ oder auch

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} \cdot \frac{b'c'}{b'd'}.$$

Digitized by Google

Dieſes Verhältniß nennt Chasles (Geſchichte der Geometrie Note IX) das anharmoniſche Verhältniß zwiſchen vier auf einer geraden Linie ſich befindenden Syſtemen von je zwei conjugirten Punkten.

Es folgt alſo aus Obigem:

„Wenn man auf einer geraden Linie vier Syſteme von zwei Punkten hat, von welchen je drei und drei in Involution ſind, ſo iſt das anharmoniſche Verhältniß von vier Punkten, die einzeln den vier Syſtemen angehören, gleich dem der vier andern Punkte."

Zuſatz 2.

Geht die Transverſale durch E und O, ſo fallen ſowohl die Punkte a, a′ in einen Punkt E, als die Punkte c, c′ in einen Punkt O zuſammen. Die Relation:

$$da.\ da' : d'a.\ d'a' = dc.\ dc' : d'c.\ d'c'$$

verwandelt ſich dadurch in:

$$\delta E^2 : \delta' E^2 = \delta O^2 : \delta' O^2 \text{ mithin iſt auch}$$

$$\delta E : \delta' E = \delta O : \delta' O \text{ d. h. die Punkte}$$

$$E,\ \delta,\ O,\ \delta'$$

ſind vier harmoniſche Punkte oder die Linie EO wird durch den Umfang des Kreiſes harmoniſch getheilt.

Zuſatz 3.

(Figur 55.)

Es gehe die Transverſale mit einer Diagonale BD parallel, ſo iſt Q der Centralpunkt der vier Punkte a, a′, b, b′, d. h. es iſt

$$Qa.\ Qa' = Qb.\ Qb' \text{ (Lehrſatz LIV, Zuſ. 4).}$$

Nun ſind ſowohl die Punkte

$$a,\ a',\ b,\ b',\ Q,\ Q',$$

wo Q′ als dem Q zugeordnet, in unendlicher Entfernung liegt, als auch die Punkte

$$a,\ a',\ b,\ b',\ d,\ d'$$

in Involution. Mithin ſtehen nach Zuſatz 1 auch

$$a,\ a',\ d,\ d',\ Q,\ Q'$$

in Involution, und weil Q′ unendlich entfernt iſt, ſo iſt auch Q der Centralpunkt der beiden Syſteme a, a′, d, d′, d. h. es iſt

$$Qa.\ Qa' = Qb.\ Qb' = Qd.\ Qd' = QA.\ QC.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt:

„Wenn drei Systeme von zwei Punkten eine Involution bilden, so gibt es immer einen gewissen Punkt von der Art, daß das Produkt seiner Entfernungen von den beiden Punkten jedes Systems constant ist."

„Umgekehrt: Wenn man auf einer Transversale von einem festen Punkt Q ausgehend, zwei solche Punkte nimmt, daß das Produkt ihrer Entfernungen von dem Punkte Q einer constanten Quantität gleich ist, so werden drei Systeme von zwei auf diese Weise bestimmten Punkten in Involution sein." (Chasles.)

Zusatz 4.

Wird eine der Vierecksseiten AD unendlich klein angenommen, so fällt die Verlängerung derselben mit der Tangente in A zusammen und die Seite CD erhält die Lage von AC. Da aber die Involution der Punkte a, a', b, b', d, d' keineswegs von der Größe einer Vierecksseite abhängt, so findet sie auch noch in dem Falle statt, wenn eine der Seiten AD unendlich klein d. h. = 0 ist.

Unter dieser Voraussetzung geht das Viereck in ein Dreieck über und aus Lehrsatz LVI folgt der vorher bewiesene Lehrsatz LV.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Das Vieleck.

Lehrsatz LVII.

(Figur 56.)

Wenn die Seiten eines beliebigen Vielecks oder auch ihre Verlängerungen von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, so wird jede Seite in zwei solche Abschnitte getheilt, daß das Produkt der einen Hälfte nicht an einander liegender Abschnitte gleich ist dem Produkt der anderen Hälfte, d. h. es ist

AM. BN. CP. DQ. ER = AR. BM. CN. DP. EQ.

Beweis.

Man ziehe AC und AD, welche die Transversale MR in den Punkten x und y durchschneiden. Dann ist nach Lehrsatz I:

AM. BN. Cx = Ax. BM. CN
Ax. CP. Dy = Ay. Cx. DP
Ay. DQ. ER = AR. Dy. EQ.

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

AM. BN. CP. DQ. ER = AR. BM. CN. DP. EQ

wie zu beweisen war.

Digitized by Google

Lehrsatz LVIII.

(Figur 57).

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Vielecks von ungerader Seitenzahl ABCDE liegenden Punkt O von den Ecken des Vielecks die Transversalen

AO, BO, CO, DO, EO

zieht und dieselben verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Vielecks treffen, so entstehen auf jeder Seite zwei Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, daß das Produkt aus der einen Hälfte nicht an einander liegender Abschnitte gleich ist dem Produkt der anderen Hälfte, d. h. es ist

AM. BN. CP. DQ. ER = AR. BM. CN. DP. EQ.

Beweis.

Es ist:

(I)
$$\begin{cases} \triangle AMO : \triangle BMO = AM : BM \\ \triangle BNO : \triangle CNO = BN : CN \\ \triangle CPO : \triangle DPO = CP : DP \\ \triangle DQO : \triangle EQO = DQ : EQ \\ \triangle ERO : \triangle ARO = ER : AR. \end{cases}$$

Ferner ist:

(II)
$$\begin{cases} \triangle AMO : \triangle DPO = AO. MO : DO. PO \\ \triangle BNO : \triangle EQO = BO. NO : EO. QO \\ \triangle CPO : \triangle ARO = CO. PO : AO. RO \\ \triangle DQO : \triangle BMO = DO. QO : BO. MO \\ \triangle ERO : \triangle CNO = EO. RO : CO. NO. \end{cases}$$

Multiplizirt man diese zweite Gruppe von Proportionen in einander, so werden die beiden letzten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden ersten Glieder; da diese aber mit dem Produkt der beiden ersten Glieder in der Gruppe (I) identisch sind, so sind auch die Produkte der beiden letzten Glieder in Gruppe (I) einander gleich, d. h. es ist

AM. BN. CP. DQ. ER = AR. BM. CN. DP. EQ

wie zu beweisen war.

Lehrsatz LIX.

(Figur 58).

In jedem zwei geraden Linien einbeschriebenen Sechseck liegen die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie.

Digitized by Google

Beweis.

Es sei ABCDEF das fragliche Sechseck, so ist zu zeigen, daß M, N, P in gerader Linie liegen. Zu dem Ende betrachte man folgende Dreiecke mit den zugehörigen Transversalen:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\ \text{ABR}\\ \triangle\ \text{BCR}\\ \triangle\ \text{ACP}\end{array}\right\}\ \text{mit EF}$$

$$\triangle\ \text{PDF mit}\ \left\{\begin{array}{l}\text{ER}\\ \text{CB und}\end{array}\right.$$

$$\triangle\ \text{QCP mit NF}$$

so folgt aus Lehrsatz I:

$$\begin{aligned}
\text{AM. BD. RE} &= \text{AE. BM. RD}\\
\text{BN. CE. RF} &= \text{BF. CN. RE}\\
\text{AE. CS. PF} &= \text{AF. CE. PS}\\
\text{PC. DR. FA} &= \text{PA. DC. FR.}\\
\text{PQ. DC. FB} &= \text{PC. DB. FQ}\\
\text{QF. CN. PS} &= \text{QN. CS. PF.}
\end{aligned}$$

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so folgt:

$$\text{AM. BN. QP} = \text{AP. BM. QN d. h.}$$

die Punkte M, N, P liegen so auf den Seiten des Dreiecks ABQ, wie Lehrsatz II erfordert, mithin sind sie in gerader Linie.

Zusatz 1.

(Figur 59.)

Theilt man ein Viereck durch eine beliebige Transversale in zwei Theile und zieht in den dadurch entstehenden kleineren Vierecken die Diagonalen, so liegen

1) die Durchschnittspunkte dieser Diagonalen mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen des ursprünglichen Vierecks in gerader Linie.
2) Verlängert man diejenigen Paare von Diagonalen in jedem der kleineren Vierecke, welche nicht auf einer der Seiten (EC, BF) des ursprünglichen Vierecks zusammentreffen, bis sie sich (in y und z) durchschneiden, so wie auch die gegenüberliegenden Seiten (BB, CF) des ursprünglichen Vierecks bis zu ihrem Durchschnitt (in x), so liegen diese drei Durchschnittspunkte in gerader Linie.

Digitized by Google

Die Eigenschaft 1) ist unmittelbar aus Lehrsatz LIX, die Eigenschaft 2) aus Lehrsatz XII klar, indem nämlich hier die Dreiecke EMB und CP*F* eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien ihrer Ecken sämmtlich durch einen und denselben Punkt N gehen.

Zusatz 2.

(Figur 60).

Wenn man in einem Fünfeck BMEC*F* die gegenüberliegenden Seiten B*F* und EM, so wie BM und CE verlängert, bis sie sich in *D* und A durchschneiden und alsdann in dem neu entstandenen Fünfeck die Diagonalen A*F* und C*D* und in dem ursprünglichen Fünfeck die Diagonalen BC und E*F* zieht, so liegen die Durchschnittspunkte P, N dieser Diagonalen mit der beiden Vielecken gemeinsamen Ecke M in gerader Linie.

Man kann nämlich wieder die ganze Figur als ein Sechseck ABC*DEF* betrachten, das den beiden Geraden AC und *DF* einbeschrieben ist und in welchem M, N, P die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten sind.

Lehrsatz LX.

(Figur 61, a und b.)

In jedem Sechseck ABCDEF, in welchem drei nicht an einander liegende Seiten AB, CD, EF in einem Punkt Q und die drei anderen BC, DE, AF in einem anderen Punkt Q′ zusammentreffen, schneiden sich die drei Diagonalen AD, BE, CF, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte verbinden, in einem und demselben Punkt *O*.

Beweis.

Der Durchschnitt von AD und BE sei *O*, so ist zu zeigen, daß *O*, C, F in gerader Linie liegen. Zu dem Ende betrachte man das Dreieck LMN mit den Transversalen BQ′, *O*D, EQ, *D*Q′ und AQ, so ist:

LC. MB. NQ′ = LQ′. MC. NB
LD. MO. NA = LA. MD. NO
LQ. ME. NF = LF. MQ. NE
LQ′ MD. NE = LD. ME. NQ′
LA. MQ. NB = LQ. MB. NA.

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

LC. MO. NF = LF. MC. NO.

Digitized by Google

Da nun alle drei Punkte *O*, C, F auf den Seiten des Dreiecks LMN liegen, so sind dieselben nach Lehrsatz II in gerader Linie.

Zusatz 1.

Verbindet man die drei in einen Punkt Q zusammenlaufenden Linien AB, CD, EF paarweise von Außen oder auch ein Paar (AB, CD) von außen und die beiden anderen Paare (*AB*, EF, so wie CD, EF) von innen (kreuzweise), so liegen die Durchschnitte N, R, S dieser Verbindungslinien stets in gerader Linie.

Beweis.

Die Dreiecke AFD und BEC liegen so, daß die Verbindungslinien ihrer Spitzen in einem und demselben Punkt Q zusammentreffen; ihre entsprechenden Seiten aber schneiden sich in N, R, S, mithin sind diese Punkte in gerader Linie (Lehrsatz XII).

Zusatz 2.

Verlängert man

AB und *DE*
BC und EF
AC und *DF*

bis sie sich einzeln durchschneiden, so liegen diese drei Durchschnittspunkte in gerader Linie. Eben so die Durchschnitte von:

AB und *CF*
AE und *DF*
EB und *DC*.

Ferner noch die Durchschnitte von

AF und *DC*
AE und *DB*
EF und BC. (Siehe Lehrs. XII).

Lehrsatz LXI.

(Figur 62.)

Wenn man von den Ecken eines Dreiecks ABC durch einen in der Ebene desselben liegenden Punkt *O* die Transversalen A*O*, B*O*, C*O* zieht,

Digitized by Google

welche das Dreieck MNP bestimmen und in diesem Dreieck durch den Punkt *O* mit den einzelnen Seiten desselben die Linien ab, cd, ef parallel legt, welche die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ treffen, so entstehen zwei Sechsecke adebcf und $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ mit folgenden Relationen:

1) Die Seiten af, de, bc des Sechsecks adebcf sind einzeln mit den Seiten des Dreiecks ABC parallel.
2) Die Seiten $\varphi\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$ des Sechsecks $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ sind mit den Seiten des Dreiecks MNP parallel.
3) Die Sechsecke adebcf und $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ sind einander ähnlich und letzteres ist viermal so groß als das erstere.

Beweis.

1) Wegen des vollständigen Vierecks AM*O*NBC sind A, Q, *O*, P vier harmonische Punkte (Lehrs. XXXV*III*) und daher die Linien

NA, N*Q*, N*O*, NP

vier harmonische Strahlen.
Nach der Konstruktion aber ist OcNb ein Parallelogramm und daher c*D* = b*D*. Da nun bc die drei harmonischen Strahlen

N*Q*, N*O*, NP

in den Punkten c, D, b durchschneidet, so ist sie mit dem vierten NA oder, was dasselbe ist, mit AC parallel. (Lehrsatz XXXV*I*).

Eben so wird gezeigt, daß af parallel mit AB, de parallel mit BC ist.

2) Da *O*γ parallel mit NP gezogen ist, so ist die Figur Nγcb ein Parallelogramm, mithin

Nγ = cb = Nβ. Eben so
Mφ = af = Mα, mithin
Mα : Mφ = Nβ : Nγ,

folglich, da $\alpha\beta$ parallel mit MN ist, auch
$\varphi\gamma$ parallel mit MN.

Eben so wird gezeigt, daß $\alpha\delta$ parallel mit MP, $\beta\varepsilon$ parallel mit NP ist.

3) Da die einzelnen Dreiecke *O*cf und *O*$\varphi\gamma$, *O*cb und *O*$\gamma\beta$, *O*de und *O*$\delta\varepsilon$, *O*ad und *O*$\alpha\delta$, *O*af und *O*$\alpha\varphi$ einander ähnlich sind, so folgt, daß auch die Vielecke adebcf und $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ einander ähnlich sind. Die Seiten des letztern sind aber doppelt so groß, als die

Digitized by Google

Seiten des erstern, mithin ist der Inhalt von $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ das Vierfache von dem Inhalt des Sechsecks adebcf.

Zusatz.

(Figur 63.)

Zieht man die Transversalen AO, BO, CO nach den Berührungspunkten M, N, P des einbeschriebenen Kreises, so hat man noch folgende Beziehungen:

1) Die Sechsecke adebcf und $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ lassen sich beide in einen Kreis beschreiben.
2) Der Radius des um das Sechseck $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ beschriebenen Kreises ist doppelt so groß, als der Radius des um adebcf beschriebenen Kreises.
3) Der Mittelpunkt des um $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ beschriebenen Kreises fällt mit dem Mittelpunkt Z des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises zusammen.
4) Der Mittelpunkt x des dem Sechseck adebcf umschriebenen Kreises liegt in der Mitte von OZ.

Beweis.

1) Es ist:

$$\angle \text{ cde} = \angle \text{ NPC} = \angle \text{ PNC} = \angle \text{ Nbc}$$

folglich:

$$\angle \text{ cde} + \text{cbe} = 180° \text{ d. h.}$$

das Viereck cbed ist ein Viereck im Kreise.

Ferner:

$$\angle \text{ bad} = \angle \text{ NMP} = \angle \text{ NPC} = \angle \text{ Ped}$$

folglich:

$$\angle \text{ bad} + \text{deb} = 180° \text{ d. h.}$$

das Viereck beda ebenfalls ein Viereck im Kreise.

Beide Kreise fallen aber zusammen, da sie drei Punkte b, e, d mit einander gemein haben.

Eben so wird gezeigt, daß der um e, d, a beschriebene Kreis durch f geht, und da derselbe mit dem um beda beschriebenen wieder drei Punkte e, d, a gemein hat, so geht ein und derselbe Kreis durch sämmtliche Punkte a, d, e, b, c, f oder das Sechseck adebcf läßt sich in einen Kreis beschreiben.

Digitized by Google

Dasselbe gilt von dem, dem ersten ähnlichen Sechseck $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$.

2) ist von selbst klar, weil sich die Radien der um ähnliche Vielecke beschriebenen Kreise wie die einzelnen Seiten dieser Vielecke verhalten.

3) Da $\beta\gamma$, $\alpha\varphi$, $\delta\varepsilon$ Sehnen in dem um $\alpha\delta\varepsilon\beta\gamma\varphi$ beschriebenen Kreise sind, so findet man den Mittelpunkt, wenn man in den Mitten N, M, P derselben Perpendikel errichtet und deren Durchschnittspunkt Z sucht. Dieser aber ist kein anderer, als der Mittelpunkt des um MNP beschriebenen Kreises, da ja die Radien ZM, ZN, ZP auf den Tangenten *AB*, *AC*, *BC* senkrecht stehen.

4) Es sei x der Mittelpunkt des um adebcf beschriebenen Kreises, so ist

$$Oy : Oc = yZ : cx$$

mithin O, x, Z in gerader Linie und

$$OZ = 2Ox$$

also x in der Mitte von OZ.

Lehrsatz LXII.

(Figur 64.)

Wenn die Seiten eines beliebigen Viekecks von einem Kreise geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite vier Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, daß das Produkt der einen Hälfte gleich ist dem Produkt der andern Hälfte, vorausgesetzt, daß in einem und demselben Produkt nicht solche Abschnitte vorkommen, welche einen Punkt des Kreises zum gemeinschaftlichen Endpunkt haben, d. h. es ist:

*A*M. *A*m. *B*N. Bn. C*P*. Cp. DQ. Dq. ER. Er =
*A*R. Ar. *B*M. Bm. *C*N. Cn. DP. Dp. EQ. Eq.

Beweis.

Es ist:

AM. *A*m = AR. Ar
*B*N. *B*n = *B*M. Bm
CP. Cp = CN. Cn
DQ. Dq = DP. Dp
ER Er = EO. Eσ.

Digitized by Google

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander, so erhält man:

AM. Am. BN. Bn. CP. Cp. DQ. Dq. ER. Er =
AR. Ar. BM. Bm. CN. Cn. DP. Dp. EQ. Eq

wie zu beweisen war.

Zusatz.

Die obige Relation vereinfacht sich, wenn die Seiten des Vielecks den Kreis statt zu schneiden berühren. In diesem Fall hat man nämlich, wenn die Berührungspunkte M', N', P', Q', R' genannt werden:

AM'. BN'. CP'. DQ'. ER' = AR'. BM'. CN'. DP'. EQ' d. h.

in einem jeden dem Kreis umschriebenen Vieleck ist das Produkt der einen Hälfte nicht an einander liegender Abschnitte der Vielecksseiten gleich dem Produkt der andern Hälfte, wobei die Abschnitte der Seiten stets von einer Ecke bis zu einem Berührungspunkt genommen sind.

Erklärung.

Zwei ähnliche Vielecke können in einer Ebene eine solche Lage haben, daß ihre homologen Seiten parallel sind und alsdann haben die Schenkel der homologen Winkel entweder dieselbe oder eine gerade entgegengesetzte Richtung. Im ersten Fall sagt man, die Vielecke haben eine direkt ähnliche, im zweiten Fall, sie haben eine inverse Lage.

Lehrsatz LXIII.

(Figur 65, a und b).

Wenn zwei Vielecke eine direkt ähnliche oder auch eine inverse Lage haben, so laufen die geraden Linien, welche je zwei homologe Ecken verbinden, alle in einem und demselben Punkt zusammen.

Beweis.

Die ähnlichen Vielecke seien ABCDE und abcde und die Linien Aa und Bb schneiden sich in O, so ist zu zeigen, daß auch die übrigen Verbindungslinien Cc, Dd, Ee homologer Ecken durch denselben Punkt O gehen.

Nun ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und abo offenbar:

AB : ab = BO : bo.

Digitized by Google

Aber wegen Aehnlichkeit der Vielecke ist

$$AB : ab = BC : bc \text{ mithin auch}$$

$$BO : bo = BC : bc \text{ d. h.}$$

die Punkte C, c, o liegen in gerader Linie oder es geht Cc durch den Punkt O.

Eben so wird bewiesen, daß Dd und Ee durch O gehen, mithin schneiden sich sämmtliche Verbindungslinien in einem und demselben Punkt.

Erklärung.

Der Punkt O heißt äußerer Aehnlichkeitspunkt, wenn die Vielecke eine direkt ähnliche, innerer Aehnlichkeitspunkt, wenn sie eine inverse Lage haben.

Lehrsatz LXIV.

(Figur 65, a und b).

Jede durch den Aehnlichkeitspunkt O zweier ähnlichen Vielecke gehende gerade Linie OM ist eine den beiden Vielecken gemeinsame homologe Linie (Aehnlichkeitslinie) und bildet mit zwei homologen Seiten stets dieselben Winkel. Ihr Abstand von den homologen Ecken hat stets dasselbe Verhältniß, wie der Abstand dieser Ecken vom Aehnlichkeitspunkt selbst.

Beweis.

Ersteres ist von selbst klar, weil die homologen Seiten einander parallel sind, letztes folgt offenbar aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OAA' und oaa', denn es ist

$$AA' : aa' = OA : Oa.$$

Zusatz.

Der vorstehende Lehrsatz ist der Umkehrung fähig, d. h. jede Linie, deren Abstand von je zwei homologen Ecken mit dem Abstand des Aehnlichkeitspunktes von denselben Ecken proportional ist, geht durch den Aehnlichkeitspunkt oder ist eine Aehnlichkeitslinie, denn aus

$$AA' : aa' = oA : Oa$$

folgt offenbar, daß O, a', A' in einer geraden Linie liegen.

Digitized by Google

Lehrsatz LXV.

Sind drei Vielecke P, P′, P″ direkt ähnlich, so liegen die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie.

Beweis.

Es seien

d der äußere Aehnlichkeitspunkt von P′ und P″
d′ „ „ „ „ P und P″
d″ „ „ „ „ P und P′.

Man ziehe dd′, so ist dies eine Aehnlichkeitslinie für P′ und P″ so wie für P und P″, mithin auch für P und P′, d. h. diese Linie geht durch d″, den Aehnlichkeitspunkt für P und P′ (Lehrsatz LXIV, Zusatz).

Anmerkung.

In diesem und dem nächstfolgenden Satze sind die Figuren weggelassen, theils weil sie für den Beweis überflüssig erscheinen, theils weil sie der Leser leicht hinzudenken oder nach dem Beweise construiren kann.

Lehrsatz LXVI.

Haben zwei ähnliche Vielecke unter sich eine direkt ähnliche, mit einem dritten dagegen eine inverse Lage, so liegen wieder drei Aehnlichkeitspunkte, nämlich der äußere der beiden ersten und die beiden anderen inneren in gerader Linie.

Beweis.

Es seien die Vielecke P′ und P″ direkt ähnlich und es sei

d der äußere Aehnlichkeitspunkt von P′ und P″
i′ der innere „ „ P und P″
i″ „ „ „ „ P und P′.

Zieht man nun i′ i″, so ist dies die inverse Aehnlichkeitsare für P″ und P so wie für P′ und P, mithin die direkte Aehnlichkeitstare für P″ und P′, d. h. sie geht durch d, den Aehnlichkeitspunkt von P′ und P″ (Lehrsatz LXIV, Zusatz).

Digitized by Google

Zusatz 1.

Sind die Vielecke regelmäßig, so ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte eine homologe Linie, mithin liegen die Mittelpunkte in gerader Linie mit dem Aehnlichkeitspunkt, dessen Abstand von den beiden Mittelpunkten den entsprechenden Seiten der ähnlichen Vielecke oder auch den Radien der umschriebenen Kreise proportional ist.

Zusatz 2.

Haben zwei regelmäßige und ähnliche Vielecke eine gerade Anzahl von Seiten, so ist jede Seite des einen zwei entgegengesetzten Seiten des andern parallel; zwei solche Vielecke sind also sowohl direkt als invers ähnlich: sie haben mithin einen äußeren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt, deren Abstand von je zwei entsprechenden Seiten den Radien der in- und umschriebenen Kreise proportional ist. Drei solcher Vielecke haben also drei äußere und drei innere Aehnlichkeitspunkte und es liegen sowohl die drei äußeren als je zwei innere mit einem äußeren in gerader Linie. Diese sechs Punkte liegen mithin je drei und drei im Durchschnitt der vier Aehnlichkeitsaxen.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Der Kreis.

a. Pol und Polare.

Lehrsatz LXVII.

(Figur 66, a und b).

Wenn man durch einen beliebigen Punkt O in der Ebene eines Kreises beliebige Sehnen CD, EF zieht, welche den Kreis in den Punkten C, D, E, F treffen, und in diesen Punkten Tangenten an den Kreis zieht, welche sich je zwei und zwei in den Punkten M, P durchschneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte der einzelnen Tangentenpaare in einer geraden Linie MP, deren Abstand vom Mittelpunkt des Kreises der dritten Proportionale zum Abstand des gegebenen Punktes vom Mittelpunkt und dem Radius des Kreises gleich ist.

Beweis.

Man verbinde den Punkt O mit dem Mittelpunkt Z des gegebenen Kreises durch die Gerade OZ und nehme auf dieser Linie den Punkt N so, daß OZ : R = R : NZ, d. h., daß NZ gleich der dritten Proportionale zum Abstand des gegebenen Punktes O vom Mittelpunkt und dem Radius des Kreises sei, und ziehe sodann MN von N nach dem Durchschnitt M eines beliebigen Tangentenpaares, so ist zu zeigen, daß NM senkrecht auf OZ steht. Zu dem Ende ziehe man MZ und CZ, so ist wegen der rechten Winkel MCZ und CGZ

$$GZ : CZ = CZ : MZ.$$

Digitized by Google

Aber nach der Konstruktion:

$$OZ : R = R : NZ \text{ mithin}$$

da CZ = R (d. Radius des Kreises) auch

$$GZ : OZ = NZ : MZ.$$

Es sind also die Dreiecke OGZ und NMZ einander ähnlich, mithin

$$\angle MNZ = \angle OGZ = 90°.$$

Es liegt also der Punkt M und eben so jeder andere Durchschnittspunkt P zweier entsprechenden Tangenten in der auf OZ in N errichteten Senkrechten, wodurch der vorstehende Lehrsatz vollständig bewiesen ist.

Zusatz und Erklärung.

Aus vorstehendem Lehrsatz folgt, daß wenn der Punkt O gegeben ist, auch die Linie MN bestimmt ist, und umgekehrt. Man nennt daher:

O den Pol von MN,

MN die Polare des Punktes O.

Liegt ersterer innerhalb des Kreises, so fällt die entsprechende Polare außerhalb desselben und umgekehrt. Fällt der Pol in den Umfang des Kreises, so ist seine Polare die durch den Pol gehende Tangente. Fällt der Pol mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammen, so liegt seine Polare in unendlicher Entfernung.

Zusatz 2.

Da MZ : R = R : ZG, so ist

M der Pol zur Berührungssehne CD und eben so

P „ „ „ „ EF seiner Tangenten PE, PF.

Nun schneiden sich aber CD und EF in O und dieser Punkt O ist der Pol für die Linie MP. Es folgt daher allgemein:

1) Der Durchschnitt zweier Polaren ist der Pol für die Verbindungslinie der Pole jener Polaren.
2) Liegen mehrere Punkte M, N, P innerhalb oder außerhalb des Kreises in gerader Linie, so schneiden sich ihre Palaren in einem und demselben Punkt.

Lehrsatz LXVIII.

(Figur 66, a, und b.)

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Kreises liegenden Punkt O eine beliebige Transversale CD zieht, welche den Kreis

Digitized by Google

in C, D, die zugehörige Polare MP des Punktes O in Q trifft, so sind die Punkte

O, C, Q, D

stets harmonische Punkte, oder es ist

$$OC : OD = CQ : DQ.$$

Beweis.

Da $\angle$ MCZ $=$ $\angle$ MNZ $= 90°$, so ist das Viereck MCZN ein Viereck im Kreise und daher

$$\angle \text{ CNO} = \angle \text{ CMZ}.$$

Ferner ist $\angle$ MDZ $=$ $\angle$ MNZ $= 90°$, mithin auch MNDZ ein Viereck im Kreise und daher

$$\angle \text{ DNZ} = \angle \text{ DMZ}.$$

Nun ist aber $\angle$ CMZ $=$ $\angle$ DMZ, mithin auch $\angle$ CNO $=$ $\angle$ DNZ.

Da nun von den vier Linien ON, NC, NM, ND zwei NO und NM auf einander senkrecht sind und zudem gleiche Winkel CNO, DNZ mit den beiden anderen NC und ND bilden, so sind diese Linien vier harmonische Strahlen (Lehrs. XXXVI, Zusatz), mithin sind

O, C, Q, D vier harmonische Punkte,

oder es ist:

$$OC : OD = CQ : DQ.$$

Lehrsatz LXIX.

(Figur 67).

Zieht man durch den Pol O einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden PQ eine beliebige Sehne EF, errichtet in E und F die Tangenten EC und FD und schneidet diese mit einer beliebigen durch O gehenden Transversale CD, so wird die Distanz CD in *O* und B (dem Durchschnitt mit der Polare PQ) harmonisch getheilte, d. h. es ist, wie auch die BO gezogen ist, stets

$$CO : DO = BC : DB.$$

Beweis.

Man verlängere EF, bis sie die PQ in Q schneidet, so sind (Lehrsatz LXVIII)

Digitized by Google

F, *O*, E, Q

vier harmonische Punkte, mithin die von P (wo P als Durchschnitt der von CE und DF ausgehenden Tangenten nothwendig auf der Polaren des Punktes *O* liegt, Lehrsatz LXVII) auslaufenden Strahlen

PF, PO, PE, PQ

vier harmonische Strahlen; daher auch

C, O, D, B vier harmonische Punkte, oder

CO : DO = BC : BD.

Zusatz.

Verbindet man den Punkt N mit C und D, so ist ∠ CNO = ∠ DNO.

Da nämlich

NC, NO, ND, NB vier harmonische Strahlen sind, von denen zwei NO und NB auf einander senkrecht stehen, so sind die mit den beiden andern Strahlen gebildeten Winkel einander gleich, d. h.

∠ CNO = ∠ DNO

∠ CN*Q* = ∠ BND.

Lehrsatz LXX.

(Figur 68, a. und b.)

Wenn man durch einen beliebigen Punkt O innerhalb oder außerhalb eines Kreises die Sekanten OB, OD zieht, welche den Kreis in den Punkten A, B, C, D treffen, sodann diese Punkte durch die Geraden AC, BD so wie durch AD, BC mit einander verbindet, so liegen die Durchschnittspunkte *Q*, P dieser Verbindungslinien stets auf der Polaren des ursprünglichen Punktes O.

Beweis.

Da ACBDQP ein vollständiges Viereck ist, so ist AB durch O und PQ in O und E harmonisch getheilt oder es sind die Punkte

O, A, E, B

vier harmonische Punkte.

Nun liegen aber zwei dieser Punkte A und B im Umfange des Kreises, wie daher auch O liegen mag, so muß der vierte dem Punkte O zu-

Digitized by Google

geordnete harmonische Punkt E auf der Polare des Punktes O liegen (Lehrsatz LXVIII). Dasselbe gilt für den Punkt *F*, mithin ist EF oder, was dasselbe ist, PQ die Polare des Punktes O.

Aufgabe.

(Figur 68, a).

Es ist ein Punkt O außerhalb des Kreises gegeben, man soll von ihm durch blos lineare Construktion an den Kreis die beiden Tangenten ziehen.

Auflösung.

Man ziehe durch O die beiden Sekanten OA, OC beliebig, welche den Kreis in A, B, C, D treffen, verlängere AC und BD, bis sie sich in Q, AD und *BC*, bis sie sich in *P* durchschneiden, ziehe PQ und von O nach den Punkten M und N, in welchen der Kreis von PQ geschnitten wird, die Geraden OM und ON, so sind dies die verlangten Tangenten.

Lehrsatz LXXI.

(Figur 69).

Wenn man zu einem beliebigen Punkt P außerhalb des Kreises die Polare EF zieht, sodann die Distanz OP durch die Senkrechte NM halbirt und von P die beliebige Sekante PB zieht, endlich E mit *A* und B verbindet und die EA verlängert, bis sie die NM in M trifft, so ist *PM* stets parallel mit EB.

Beweis.

Nach Lehrsatz LXVIII sind

P, *A*, Q, B

vier harmonische Punkte und daher

E*P*, EA, EQ, EB

vier harmonische Strahlen.

Verlängert man nun PM, bis sie die EO in R trifft, so ist wegen PG = GO auch *PM* = MR.

Digitized by Google

Daraus aber folgt, daß der vierte harmonische Strahl EB von der Transversale PR erst in unendlicher Entfernung getroffen wird, oder daß PM mit EB parallel ist (Lehrsatz XXXVI).

Lehrsatz LXXII.

(Figur 70.)

Wenn man zu einem beliebigen Punkt P außerhalb des Kreises die Polare QR zieht, sodann die Distanz OP durch die Senkrechte NM halbirt und von *P* aus zwei beliebige Sekanten PB, PD zieht, endlich *A* mit C, und B mit D verbindet und die AC verlängert, bis sie die MN in M trifft, so ist PM stets parallel mit BD.

Beweis.

Nach Lehrsatz LXVIII sind

P, C, E, D

vier harmonische Punkte und daher

QP, QC, QE, QD

vier harmonische Strahlen.

Verlängert man nun *PM*, bis sie die QO in R trifft, so ist wegen PG = GO auch PM = MR.

Daraus aber folgt, daß der vierte harmonische Strahl QD von der Transversale PR erst in unendlicher Entfernung getroffen wird oder daß PM mit BD parallel ist (Lehrsatz XXXVI).

Anmerkung.

Geht die Sekante P*B* in eine Tangente über, so wird man wieder auf Lehrsatz LXXI zurückgeführt.

Lehrsatz LXXIII.

(Figur 71).

Wenn man eine beliebige Sehne AB halbirt und die Endpunkte *A* und B derselben mit einem dritten im Umfang des Kreises liegenden Punkt C verbindet, so wird der auf AB senkrecht stehende Durchmesser *P*Q durch die Sehnen AC und BC harmonisch getheilt oder es ist

PE : EQ = PD : DQ.

Digitized by Google

Beweis.

Da ACQP ein Viereck im Kreise, so ist

$$\angle APQ = \angle QCD.$$

Ferner ist

$$\angle BPQ = \angle QCE \ (= \tfrac{1}{2} \text{ Bogen } BQ).$$

Aber

$$\angle APQ = \angle BPQ \text{ mithin auch}$$
$$\angle QCD = \angle QCE.$$

Da nun PC und CQ auf einander senkrecht stehen, so sind die Linien

CP, CE, CQ, CD

vier harmonische Strahlen (Lehrsatz XXXVI, Zusatz) mithin

P, E, Q, D

vier harmonische Punkte oder es ist

$$PE : EQ = PD : DQ.$$

---

b. Der Kreis mit ein- und umschriebenen Figuren.

Lehrsatz LXXIV.

(Figur 72.)

Wenn man in einem dem Kreis umschriebenen Viereck ABCD die Berührungspunkte der einzelnen Seiten mit einander verbindet, so entsteht ein einbeschriebenes Viereck EGFH, welches zum umschriebenen Viereck ABCD folgende Beziehungen hat:

1) Die Durchschnittspunkte N, Q der gegenüberliegenden Seiten des einbeschriebenen Vierecks EGFH liegen mit den Durchschnittspunkten M, P der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks ABCD in gerader Linie und zwar sind diese Punkte M, N, P, Q vier harmonische Punkte.
2) Die Durchschnittspunkte N, Q der gegenüberliegenden Seiten des einbeschriebenen Vierecks EGFH liegen zugleich in der Verlängerung der Diagonalen BD und AC des umschriebenen Vierecks ABCD und sind einzeln die Pole dieser Diagonalen, d. h.

N der Pol von AC
Q der Pol von BD.

Digitized by Google

3) Die Diagonalen des einbeschriebenen Vierecks EGFH haben mit den Diagonalen des umschriebenen Vierecks *ABCD* einen und denselben Durchschnittspunkt O, welcher zugleich der Pol der Linie MQ ist, in welcher die einzelnen Seiten des in- und umschriebenen Vierecks zusammenlaufen.

Beweis.

1) Es sei O der Durchschnitt von EF und GH, dann ist, weil

M der Pol zu EF,

P der Pol zu GH (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2)

offenbar O der Pol von MP (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2).

Aber es ist auch O der Pol von NQ (Lehrsatz LXX); folglich fallen MP und NQ zusammen oder es liegen die Punkte M, N, P, Q in gerader Linie.

2) Ferner ist

$$AE = AG$$
$$DG = DF$$
$$CF = CH$$
$$BH = BE$$

mithin, wenn man multiplizirt,

AE. DG. *CF*. BH = AG. D*F*. *CH*. BE d. h.

es schneiden sich die Geraden EG und FH auf der Diagonale BD (Lehrsatz LI) und ebenso G*F* und EH auf der Diagonale *AC*; oder es gehen die Diagonalen BD und *AC* durch die Durchschnittspunkte N und Q der gegenüberliegenden Seiten des einbeschriebenen Vierecks EG*F*H.

3) Da A der Pol von EG,

C der Pol von FH, so ist

N der Pol von AC (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2).

Eben so Q der Pol von BD, mithin der Durchschnitt von AC und *B*D wiederum der Pol von NQ; dieser Pol aber ist der Punkt O (Lehrs. LXX) d. h. es gehen AC und BD beide durch denselben Punkt O, in welchem sich EF und GH schneiden; folglich haben sämmtliche Diagonalen AC, BD, EF, GH einen und denselben Durchschnittspunkt.

Betrachtet man endlich das vollständige Viereck ABCDMP, so sieht man leicht, daß die Diagonale MP durch BD und AC in N und Q harmonisch getheilt wird (Lehrsatz XXXVIII) oder daß die Punkte

M, N, P, Q

vier harmonische Punkte sind.

Hiedurch sind alle unter 1), 2), 3) aufgestellten Eigenschaften erwiesen.

Digitized by Google

Zusatz 1.

In dem einbeschriebenen Viereck EG*F*H ist das Quadrat der dritten Diagonale NQ gleich der Summe der Rechtecke aus dem Abstand der Punkte N und Q von je zwei anliegenden Ecken des einbeschriebenen Vierecks d. h.

$$NQ^2 = NE.\ NG + QE.\ QH \text{ oder}$$
$$NQ^2 = N\mathit{F}.\ NH + Q\mathit{F}.\ QG.$$

Beweis.

Da Q der Pol von *B*D, so sind QJ und QK Tangenten an den Kreis, mithin das Dreieck QJK ein gleichschenkeliges, und da N in der Verlängerung von JK liegt, so ist nach Lehrsatz XXIV:

$$QK^2 = QN^2 - NJ.\ NK \text{ mithin}$$
$$NQ^2 = QK^2 + NJ.\ NK.$$

Nun ist aber

$$QK^2 = QE.\ QH \text{ und}$$
$$NJ.\ NK = NE.\ NG$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt:

$$NQ^2 = NE.\ NG + QE.\ QH.$$

Eben so

$$NQ^2 = N\mathit{F}.\ NH + QF.\ QG$$

wie zu beweisen war.

Zusatz 2.

(Figur 72.)

Aus Lehrsatz LXXIV ergeben sich noch folgende Eigenschaften:

1) In jedem einem Kreis einbeschriebenen Viereck EGFH sind der Durchschnittspunkt der Diagonalen und die Zusammentreffungspunkte der gegenüberliegenden Seiten drei solche Punkte, daß ein jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden anderen ist.
2) In jedem einem Kreis umschriebenen Viereck ist jede Diagonale die Polare des Durchschnittspunktes der beiden anderen Diagonalen.
3) Haben drei in der Ebene eines Kreises liegende Punkte N, O, Q eine solche Lage, daß jeder von ihnen der Pol zur Verbindungslinie der beiden anderen ist und man beschreibt in den Kreis ein Dreieck EGH (EG*F*, GFH etc.), von welchem zwei Seiten durch zwei dieser Punkte gehen, so geht die dritte Seite stets durch den dritten

Digitized by Google

Punkt. Außerdem wird jede Seite dieses Dreiecks durch den einen dieser Punkte und die Verbindungslinie der beiden anderen harmonisch getheilt.

4) Unter denselben Voraussetzungen wie in 3) gibt es immer eine unendliche Menge umschriebener Dreiecke ABP, CDP etc., deren Ecken einzeln auf den Seiten des Dreiecks NOQ liegen, und es wird jede Seite dieses Dreiecks durch die entsprechende Ecke und die Verbindungslinie der beiden anderen harmonisch getheilt.

Lehrsatz LXXV.

(Figur 73.)

Zieht man in einem Kreise 2 Tangenten AM, BN an die Endpunkte eines Durchmessers *AB*, und schneidet dieselben durch eine beliebige dritte Tangente MN, so ist das Rechteck aus den beiden parallelen Tangenten-Abschnitten AM, BN stets constant, wie auch die dritte Tangente MN gezogen sein mag, und zwar gleich dem Quadrate des Radius, d. h.

$$AM.\ BN = R^2.$$

Beweis.

Verlängert man *AM* und BN, bis sie die mit dem Durchmesser AB parallel gezogene Tangente PQ in *P* und Q treffen, so hat man ein dem Kreis umschriebenes Viereck MPQN, in welchem sich die Diagonalen MQ und NP auf der Diagonale *AB* des einbeschriebenen Vierecks treffen (Lehrsatz LXXIV).

Demnach hat man

$$AS : BS = AP : BN \text{ und}$$
$$BS : AS = BQ : AM$$

folglich, wenn man multiplizirt:

$$AM.\ BN = AP.\ BQ = R^2.$$

Lehrsatz LXXVI.

(Figur 74.)

Beschreibt man in einen Kreis eine Reihe von Vierecken *ABCD*, *A'B'C'D'* ꝛc. so, daß drei ihrer Seiten AB, *A'B'*, *BC*, *B'C'*, *CD*, *C'D'* in gleicher Reihenfolge durch drei feste in gerader Linie liegende Punkte M, N, P gehen, so schneiden sich die vierten Seiten AD, *A'D'* ꝛc. ebenfalls

Digitized by Google

stets in einem und demselben Punkt Q, der mit den drei ersten M, N, P in gerader Linie liegt.

Beweis.

Die gerade Linie MNP schneide den Kreis in V und W und die vierte Seite AD des Vierecks ABCD in Q, dann sind nach Lehrsatz LVI die Punkte

M, P, V, W, N, Q

in Involution. Da aber fünf dieser Punkte, nämlich M, N, P, V, W, für alle unsere einbeschriebenen Vierecke dieselbe Lage haben, so muß auch der dem Punkt N zugeordnete Punkt Q stets derselbe sein, d. h. die jedesmalige vierte Seite AD, A'D' muß stets in einem und demselben Punkt von der Transversale MP geschnitten werden, oder es müssen alle vierten Viereckseiten durch einen und denselben Punkt Q gehen.

Lehrsatz LXXVII.

(Figur 75).

In jedem dem Kreis einbeschriebenen Sechseck liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie.

Beweis 1.

Man zerlege das Sechseck ABCDEF durch die Diagonale BE in die beiden Vierecke BCDE und ABEF und verlängere BE, bis sie die Gerade PN in V trifft, so ist zu zeigen, daß auch der Punkt M in der Geraden PN liegt. Nun liegen aber die Durchschnitte P, N, V von drei Seitenpaaren CD, AF, BC, EF, BE, BE der Vierecke BCDE und ABEF in gerader Linie, daher muß nach Lehrsatz LXVI auch der Durchschnitt M der vierten Seiten DE und AB in derselben Geraden PN liegen, d. h. es liegen die Punkte P, N, M in gerader Linie.

Beweis 2.

Man verlängere je zwei nicht an einander liegende Seiten AF, BC, DE des Sechsecks ABCDEF, bis sie sich in Q, R, S durchschneiden, und betrachte die drei anderen Seiten AB, CD, EF einzeln als Transversalen des Dreiecks QRS, dann ist zufolge Lehrsatz I:

Digitized by Google

QA. RM. SB = QB. RA. SM
QP. RD. SC = QC. RP. SD
QF. RE. SN = QN. RF. SE.

Multiplizirt man diese Gleichungen in einander, so erhält man:

(I) QP. RM. SN. QA. QF. RD. RE. SB. SC =
QN. RP. SM. QB QC. RA. RF. SD. SE.

Nun ist aber:

QA. QF = QB. QC
RD. RE = RA. RF
SB. SC = SD. SE

folglich auch:

(II) QA. QF. RD. RE. SB. SC = QB. QC. RA. RF. SD. SE.

Dividirt man (I) durch (II), so erhält man:

QP. RM. SN = QN. RP. SM.

Da nun die Punkte M, N, P sämmtlich auf den Seiten des Dreiecks QRS liegen, so sind dieselben in gerader Linie (Lehrsatz II).

Zusatz.

Aus vorstehendem Lehrsatz folgt:

Liegen fünf Ecken eines Sechsecks im Kreise und die Durchschnittspunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten bilden eine gerade Linie, so liegt die sechste Ecke ebenfalls im Kreise.

Lehrsatz LXXVIII.

In jedem dem Kreise umschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Scheitelpunkte verbinden, in einem und demselben Punkt.

Beweis.

(Figur 76.)

Es sei ABCDEF das dem Kreis umschriebene Sechseck und abcdef dasjenige einbeschriebene Sechseck, dessen Ecken die Berührungspunkte der Seiten des umschriebenen bilden; nennt man nun

M den Durchschnitt von ab und de,
N „ „ „ bc und ef,
P „ „ „ cd und af,

Digitized by Google

so sind diese Punkte

M, N, P

zugleich die Pole von

BE, CF, AD (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2).

Da aber nach dem vorhergehenden Lehrsatz M, N, P in gerader Linie liegen, so schneiden sich ihre Polaren

BE, CF, AD

in einem und demselben Punkt.

Zusatz.

Aus dem vorstehenden Lehrsatz folgt:

Berühren fünf Seiten eines Sechsecks einen Kreis und die Diagonalen des Sechsecks schneiden sich in einem und demselben Punkt, so berührt auch die sechste Seite den Kreis.

Lehrsatz LXXIX.

(Figur 77.)

Zieht man durch den Scheitel E eines dem Kreise einbeschriebenen Fünfecks die Tangente EP an den Kreis und verlängert dieselbe, bis sie die gegenüberliegende Seite AC trifft, so liegt der Durchschnittspunkt P dieser beiden Linien in gerader Linie mit den Durchschnitten M und N von je zwei nicht anliegenden der übrigen vier Fünfecksseiten.

Beweis.

Man denke sich in dem Sechseck ABCDEF die Seite EF unendlich klein, so fällt der Punkt F mit dem Punkt E zusammen und die Seite selbst erhält die Richtung der Tangente EP. Demnach ist dieser Satz eine bloße Folgerung aus Lehrsatz LXXVII.

Aufgabe.

Man soll durch blos lineare Construktion (mit bloßer Anwendung des Lineals) durch einen im Umfang des Kreises gegebenen Punkt eine Tangente an den Kreis ziehen.

Digitized by Google

Auflösung 1.

(Figur 78.)

Es sei A der gegebene Punkt; man ziehe von A die Sehnen AC, AB beliebig, ferner aus B und C die Linien BE und CD, erstere parallel mit AC, letztere parallel mit AB, verbinde D mit E und ziehe aus A die AF parallel mit DE, so ist dies die verlangte Tangente.

Beweis.

ACDEB ist ein Fünfeck im Kreise, in welchem die Seiten AC und BE, so wie AB und CD erst in unendlicher Entfernung zusammentreffen; daher trifft auch die durch A gezogene Tangente erst in unendlicher Entfernung mit DE zusammen, oder diese Tangente ist mit DE parallel. (Lehrsatz LXXIX).

Auflösung 2.

(Figur 79.)

Es sei wiederum A der gegebene Punkt; man nehme noch vier andere Punkte B, C, D, E beliebig im Umfange des Kreises, verbinde A mit ihnen durch die Geraden AB, AC, AD, AE und ziehe EC und ED, welche die AB in M und R schneiden; ferner ziehe man BE, welche der AD in Q, der AC in N begegnet, verbinde M mit N und Q mit R, so erhält man als Durchschnitt der beiden letzteren Verbindungslinien MN und QR den Punkt P; zieht man nun endlich PA, so ist dies die verlangte Tangente.

Beweis.

Es sei a der Durchschnitt von BC und AE,
b „ „ „ BD und AE,
so ist wegen der vollständigen Vierecke ACEBNM und ABEDRQ
a der Pol von MN,
b „ „ „ QR (Lehrsatz LXXIV), mithin
P „ „ „ ab, oder, was dasselbe ist,
von AE; zieht man also PA, so ist dies eine Tangente an den Kreis.

Lehrsatz LXXX.

(Figur 80).

In jedem dem Kreis umschriebenen Fünfeck ABDFC geht die Linie AE, welche aus einem Scheitel nach dem Berührungspunkt der gegenüberliegen-

Digitized by Google

den Seite gezogen ist, durch den Durchschnitt O der von den anderen Scheiteln ausgehenden Diagonalen.

Beweis.

Denkt man sich in einem dem Kreis umschriebenen Sechseck die Seiten DE und EF zusammenfallend, so wird der Punkt E der Berührungspunkt von *DF* und die drei Diagonalen fallen ganz mit den Geraden AE, BF, CD zusammen. Demnach ist dieser Satz nur eine Folgerung von Lehrsatz LXXVIII.

Lehrsatz LXXXI.

(Figur 81.)

Zieht man in einem dem Kreis umschriebenen Viereck AEDC die eine Diagonale AD und von den beiden anderen Ecken C und E die Geraden *CF* und EB nach den Berührungspunkten der Seiten AE und AC, so schneiden sich diese drei Geraden *AD*, CF, BE in einem und demselben Punkt O.

Beweis.

Betrachtet man das Viereck *AEDC* als ein dem Kreis umschriebenes Sechseck *ABCDEF*, in welchem zwei Paare von Seiten, nämlich *AB* und BC, so wie *AF* und EF, zusammenfallen, so folgt dieser Satz aus Lehrsatz LXXVIII.

Zusatz 1.

Verlängert man die einzelnen Seiten des Vierecks *AEDC*, bis sich die gegenüberliegenden Seiten in E′ und C′ durchschneiden, so erhält man ein neues Viereck *AE′DC′*, welches ebenfalls dem Kreis umschrieben ist. Zieht man daher die Geraden E′B, C′*F* aus den Ecken E′, C′ nach den Berührungspunkten B und F, so schneiden sich auch diese Geraden in einem Punkte Q der Diagonale *AD*.

Zusatz 2.

Zieht man noch die Linien AH, AJ nach den Berührungspunkten der Seiten CD, DE, so schneiden sich die Geraden

Digitized by Google

AH, CF, E'B

in einem und demselben Punkt V (Lehrsatz XXVIII).

Eben so schneiden sich

AJ, EB, C'F

in einem und demselben Punkt W.

Ferner haben die Geraden

C'H, CJ, DB und eben so

die Geraden

E'J, EH, DF

einen und denselben Durchschnittspunkt (Lehrsatz XXVIII).

Anmerkung.

Denkt man sich in einem dem Kreis einbeschriebenen Sechseck drei Paare von Ecken oder in einem dem Kreis umschriebenen Sechseck drei Paare von Seiten zusammenfallend, so kommt man auf bekannte Eigenschaften des Dreiecks, namentlich auf die Lehrsätze XXXI und XXVIII. — Mit Hülfe derselben läßt sich leicht die Aufgabe lösen; wenn drei Tangenten eines Kreises und die Berührungspunkte zweier derselben, oder wenn drei Punkte im Umfange des Kreises und die durch zwei derselben gehenden Tangenten gegeben sind, durch bloße Anwendung des Lineals den Berührungspunkt der dritten Tangente oder die durch den dritten Punkt gehende Tangente zu bestimmen.

Lehrsatz LXXXII.

(Figur 82.)

Sind zwei Dreiecke ABC und DEF in einen und denselben Kreis einbeschrieben und man vereinigt ihre entsprechenden Ecken durch die Geraden AD, BE, CF, so entsteht ein neues Dreieck TVW, dessen Ecken einzeln sowohl auf der Polare eines Durchschnittspunktes Q zweier entsprechenden Dreiecksseiten AC, DF, als auch auf derjenigen Geraden liegen, welche von diesem Durchschnittspunkt Q zu dem Pol der die beiden anderen Durchschnitte M, N verbindenden Linie MN gezogen ist.

Beweis.

Man verlängere AF und CD bis zu ihrem Durchschnitt in P, so ist ABCDEF ein dem Kreis einbeschriebenes Sechseck, in welchem M, N, P

Digitized by Google

die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten sind; diese sind also nach Lehrsatz LXVII in gerader Linie. Ferner ist wegen des vollständigen Vierecks ADCFPT P der Pol von QT (Lehrsatz LXXIV), daher liegt der Pol von MP oder MN auf der Polare QT des Punktes P (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2), oder es liegt der Punkt T in der den Punkt Q mit dem Pol von MN verbindenden Geraden; aber T liegt auch in PT der Polare von Q, mithin im Durchschnitt dieser beiden Geraden.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen einzelne Seiten durch drei gegebene Punkte M, N, Q gehen.

Auflösung.

(Figur 83.)

Man construire die Polaren

XY, XZ, YZ

der gegebenen Punkte

M, N, Q

und verbinde deren einzelne Durchschnitte X, Y, Z mit den gegebenen Punkten Q, N, M durch die Geraden XQ, YN, ZM, welche die Seiten des Dreiecks XYZ in den Punkten T, V, W durchschneiden.

Zieht man nun die Geraden TV, TW, VW, so bestimmen diese in ihrem Durchschnitt mit dem Kreis sechs Punkte A, D, C, F, B, E, welche, zu je drei und drei verbunden, die Dreiecke ABC und DEF geben, die beide der Aufgabe Genüge thun.

Beweis.

Da M der Pol von XY,
N „ „ „ XZ, so ist
X „ „ „ MN (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2),

folglich liegt T sowohl in der Polare des Punktes Q, als in derjenigen Geraden, welche den Punkt Q mit dem Pol von MN verbindet.

Da nun die Punkte V und W eben so bestimmt sind wie T, so ist das Dreieck TVW dasselbe, welches in Figur 82 durch Verbindung der entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke ABC und DEF erhalten wurde; mithin müssen auch in Figur 83 die Verbindungslinien

Digitized by Google

AB, AC, BC
DE, DF, EF

seiner einzelnen Durchschnittspunkte mit dem Kreise durch die Punkte M, N, Q gehen.

Aufgabe.

(Figur 83.)

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken einzeln auf den gegebenen Geraden XY, XZ, YZ liegen.

Auflösung.

Man bestimme die Pole

M, N, Q

der gegebenen Geraden

XY, XZ, YZ

und verbinde die einzelnen Durchschnitte X, Y, Z mit den Polen Q, N, M durch die Geraden XQ, YN, ZM, so erhält man, wie in der vorhergehenden Aufgabe, das Dreieck TVW, dessen Seiten den Kreis in sechs Punkten A, D, C, F, B, E durchschneiden. — Zieht man nun durch den ersten, dritten und fünften Durchschnittspunkt, so wie auch durch den zweiten, vierten und sechsten Tangenten an den Kreis, so erhält man zwei Dreiecke, welche der Aufgabe Genüge thun.

Beweis.

Es seien

d, e, f

die Durchschnittspunkte der in D, E, F errichteten Tangenten. Zieht man nun DE, DF, EF, so ist

d der Pol von EF,
e „ „ „ DF,
f „ „ „ ED.

Da aber M, N, Q einzeln auf den Seiten DE, EF, DF liegen, so müssen die Polaren dieser Punkte durch die Pole von DE, EF, DF gehen d. h. die Linien XY, XZ, YZ gehen einzeln durch die Punkte d, e, f; mithin ist def eines der verlangten Dreiecke.

Digitized by Google

Lehrsatz LXXXIII.

(Figur 84).

Verlängert man in einem dem Kreis umschriebenen Sechseck ABCDEF die erste, dritte und fünfte Seite, bis sie das Dreieck GHJ, eben so die zweite, vierte und sechste Seite, bis sie das Dreieck LMN bilden, so schneiden sich die Verbindungslinien GM, LJ, HN der gegenüberliegenden Scheitel dieser Dreiecke je zwei und zwei auf den drei Diagonalen des Sechsecks ABCDEF.

Beweis.

Da GBLMEJ ein dem Kreis umschriebenes Sechseck ist, so schneiden sich nach Lehrsatz LXXVIII die Diagonalen GM, BE, LJ in einem und demselben Punkt *Q* oder, was dasselbe ist, die Geraden GM und LJ schneiden sich auf BE.

Eben so schneiden sich

GM und HN auf AD und
LJ und HN auf CF.

Zusatz.

Da auch LAJHDM ein dem Kreis umschriebenes Sechseck ist, so schneiden sich die Geraden

LH und JM auf AD.

Eben so die

LH und NG auf BE
und die JM und NG auf CF.

Lehrsatz LXXXIV.

(Figur 85.)

Verlängert man in einem dem Kreis einbeschriebenen Achteck ABCDEFGH die einzelnen Seiten über vier nicht an einander liegende Scheitelpunkte B, D, F, G, bis sie durch ihren Durchschnitt die Vierecke AJEK, LCMG bestimmen, so haben die Diagonalen LM und JK dieser Vierecke mit den Diagonalen BF und DH des Vierecks BDFH einen und denselben Durchschnittspunkt O.

Digitized by Google

Beweis.

Da BFEDHA ein Sechseck im Kreise ist, so liegen nach Lehrsatz LXXVII die Durchschnitte von

BF und DH,
FE und HA,
ED und AB,

d. h. die Punkte O, K, J in gerader Linie.

Es geht also die Gerade JK durch den Durchschnitt O der BF u. DH. Eben so wird bewiesen, daß LM durch diesen Punkt O geht; es schneiden sich daher die vier Geraden JK, LM, BF, DH in einem und demselben Punkt.

Lehrsatz LXXXV.

(Figur 86).

Beschreibt man in einem Kreis ein beliebiges Vieleck von gerader Seitenzahl und schneidet die einzelnen Seiten wie den Kreis durch eine beliebige Transversale pp^v, so hat das Produkt der Segmente dieser Transversale zwischen einem Punkt q des Kreises und je zwei nicht anliegenden Vielecksseiten AB, CD, EF zum Produkt der einzelnen Segmente zwischen demselben Durchschnittspunkt q des Kreises und den anderen Vielecksseiten BC, DE, AF stets dasselbe Verhältniß, wie die entsprechenden Produkte der Segmente zu einander, welche vom anderen Durchschnitt q′ der Transversale und des Kreises ausgehen, d. h. es ist

$$qp.\ qp''.\ qp^{IV} : qp'.\ qp'''.\ qp^{v} = q'p.\ q'p''.\ q'p^{IV} : q'p'.\ q'p'''.\ q'p^{v}$$

Beweis.

Man zerlege das Vieleck durch Diagonalen AD ꝛc. in einzelne Vierecke ABCD, ADEF, dann ist nach Lehrsatz LVI:

$$qp.\ qp'' : qp'.\ qx = q'p.\ q'p'' : q'p'.\ q'x \text{ und}$$
$$qx.\ qp^{IV} : qp'''.\ qp^{v} = q'x.\ q'p^{IV} : q'p'''.\ q'p^{v}$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander und läßt weg, was sich aufhebt, so erhält man:

$$qp.\ qp''.\ qp^{IV} : qp'.\ qp'''.\ qp^{v} = q'p.\ q'p''.\ q'p^{IV} : q'p'.\ q'p'''.\ q'p^{v}$$

wie zu beweisen war.

Digitized by Google

Es erhellt von selbst, daß dieser Beweis nicht nur für das Sechseck, für welches er hier zunächst gegeben ist, sondern für jedes einbeschriebene Vieleck von gerader Seitenzahl Gültigkeit hat.

Zusatz.

Wird eine Seite des Vielecks unendlich klein, so fällt deren Richtung mit der Tangente zusammen; der vorhergehende Lehrsatz gilt daher auch für ein Vieleck von ungerader Seitenzahl, vorausgesetzt, daß das Segment, welches bis zum Durchschnitt der Tangente geht, berücksichtigt wird.

Lehrsatz LXXXVI.

Wenn sich in einem dem Kreis einbeschriebenen Vieleck von gerader Seitenzahl alle Seiten außer einer einzigen, um eben so viele in gerader Linie liegende Punkte drehen, ohne daß das Vieleck bei übrigens willkürlicher Aenderung seiner Form aufhört dem Kreise einbeschrieben zu sein, so dreht sich die letzte Seite stets um einen und denselben Punkt, der mit den anderen festen Punkten in gerader Linie liegt.

Beweis

folgt aus Lehrsatz LXXXV, weil vermöge der daselbst aufgestellten Proportion jeder der 2 n Punkte p, p′, p″, p‴ ꝛc. bekannt ist, sobald die übrigen 2 n — 1 bestimmt sind.

Lehrsatz LXXXVII.

Wenn sich in einem dem Kreis umschriebenen Vieleck von gerader Seitenzahl alle Ecken außer einer einzigen, auf eben so vielen in einem Punkte zusammentreffenden Geraden bewegen, so bewegt sich auch die letzte Ecke stets auf einer festen, durch denselben Punkt gehenden Geraden.

Beweis

folgt aus dem vorhergehenden Satze vermöge der Beziehungen zwischen Pol und Polare.

Anmerkung.

Lehrsatz LXXXVI ist eine Verallgemeinerung von Lehrsatz LXXVI; dieser folgt nämlich aus jenem, wenn man 2 n = 4 setzt; eben so folgt

Digitized by Google

Aus Lehrsatz LXXXVII folgender, dem Lehrsatz LXXVI entsprechende Satz:

Beschreibt man um einen Kreis eine Reihe von Vierecken so, daß die drei ersten Eckpunkte derselben auf denselben drei in einem Punkte sich schneidenden Geraden liegen, so liegen die vierten Eckpunkte aller dieser Vierecke auf einer und derselben durch den nämlichen Durchschnittspunkt gehenden Geraden.

Lehrsatz LXXXVIII.

Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges Vieleck, zieht durch die einzelnen Ecken desselben Tangenten an den Kreis, so daß ein umschriebenes Vieleck von gleicher Seitenzahl gebildet wird, und schneidet sämmtliche Seiten sowohl des ein- als umschriebenen Vielecks mit einer beliebigen Transversalen, so hat das Produkt der Segmente dieser Transversale zwischen einem Durchschnittspunkt des Kreises und den Seiten des umschriebenen Vielecks zum Produkt der einzelnen Segmente zwischen demselben Durchschnittspunkt des Kreises und den Seiten des einbeschriebenen Vielecks stets dasselbe Verhältniß, wie die entsprechenden Produkte der Segmente zu einander, welche vom andern Durchschnittspunkt der Transversale und des Kreises ausgehen.

Beweis

folgt aus Lehrsatz LXXXV, wenn man das ein- und umschriebene Vieleck als ein einbeschriebenes Vieleck von der doppelten Seitenzahl betrachtet, in welchem die halbe Anzahl der Seiten = 0 ist und die Richtung der Tangenten hat.

Lehrsatz LXXXIX.

(Figur 87).

Beschreibt man um einen Kreis ein Vieleck von gerader Seitenzahl und zieht von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkte O an den Kreis die Tangenten Oq, Oq', so wie durch die Ecken des Vielecks die Geraden OA, OB, OC, OD, OE, OF, welche der Geraden qq' in P, P', P'', P''', P_{IV}, P_V begegnen, so hat das Produkt der Segmente der Berührungssehne qq' zwischen einem Berührungspunkt q und je zwei nicht an einander liegenden Durchschnittspunkten P, P'', P_{IV} zum Pro-

Digitized by Google

dukt der einzelnen Segmente zwischen demselben Berührungspunkt q und den anderen Punkten P′, P‴, Pᵛ stets dasselbe Verhältniß, wie die entsprechenden Produkte der Segmente zu einander, welche vom anderen Berührungspunkt q′ ausgehen, d. h. es ist

$$qP.\ qP''.\ qP^{IV} : qP'.\ qP'''.\ qP^{V} = q'P.\ q'P''.\ q'P^{IV} : q'P'.\ q'P'''.\ q'P^{V}$$

Beweis.

Es seien

$$p,\ p',\ p'',\ p''',\ p^{IV},\ p^{V}.$$

die Pole der Geraden

$$OP,\ OP',\ OP'',\ OP''',\ OP^{IV},\ OP^{V},$$

so liegen diese Pole p, p′ ꝛc. sämmtlich auf qq′, der Polare des Punktes O.

Ferner ist (Lehrsatz (LXVIII)

$$qp : q'p = qP : q'P$$
$$qp'' : q'p'' = qP'' : q'P''$$
$$qp^{IV} : q'p^{IV} = qP^{IV} : q'P^{IV}.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so erhält man:

(I) $qp.\ qp''.\ qp^{IV} : q'p.\ q'p''.\ q'p^{IV} = qP.\ qP''.\ qP^{IV} : q'P.\ q'P''.\ q'P^{IV}.$

Eben so erhält man:

(II) $qp'.\ qp'''.\ qp^{V} : q'p'.\ q'p'''.\ q'p^{V} = qP'.\ qP'''.\ qP^{V} : q'P'.\ q'P'''.\ q'P^{V}.$

Nun liegen aber die Punkte

$$p,\ p',\ p'',\ p''',\ p^{IV},\ p^{V}$$

sämmtlich auf den Seiten des einbeschriebenen Vielecks abcdef, welches die Berührungspunkte der Seiten des umschriebenen Vielecks zu seinen Ecken hat. (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2).

Deßhalb ist zufolge Lehrsatz LXXXV:

(III) $qp.\ qp''.\ qp^{IV} : qp'.\ qp'''.\ qp^{V} = q'p.\ q'p''.\ q'p^{IV} : q'p'.\ q'p'''.\ q'p^{V}$

Aus Verbindung der Proportionen
(I), (II) und (III) folgt aber

$$qP.\ qP''.\ qP^{IV} : qP'.\ qP'''.\ qP^{V} = q'P.\ q'P''.\ q'P^{IV} : q'P'.\ q'P'''.\ q'P^{V}.$$

Zusatz 1.

Auch auf das umschriebene Vieleck von ungerader Seitenzahl findet dieser Lehrsatz seine Anwendung, nur hat man hier den Punkt O, statt mit der 2 nten Ecke mit dem Berührungspunkt der 2 n — 1sten Seite oder überhaupt mit dem Berührungspunkt irgend einer Seite zu verbin-

Digitized by Google

den; denkt man sich nämlich in dem Vieleck von 2 n Seiten 2 Seiten zusammenfallend, so erhält man ein Vieleck von 2 n — 1 Seiten, in welchem die weggefallene Ecke des ersten Vielecks zum Berührungspunkt einer Seite geworden ist.

Zusatz 2.

Aus diesem Satze folgt zugleich Lehrsatz LXXXVII und zwar auf gleiche Weise, wie Lehrsatz LXXXVI aus Lehrsatz LXXXV.

Lehrsatz XC.

(Figur 88.)

Beschreibt man um einen Kreis ein beliebiges Vieleck und zieht von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt O an den Kreis die Tangenten Oq, Oq', so wie durch die Ecken des Vielecks die Geraden OA, OB, OC, welche die Berührungssehne qq' in P, P'', P^{IV}, und nach den Berührungspunkten der einzelnen Seiten die Geraden OD, OE, OF, welche die Gerade qq' in P', P''', P^{V} treffen, so hat das Produkt der Segmente zwischen einem Berührungspunkt q und den Punkten P, P'', P^{IV} zum Produkt der einzelnen Segmente zwischen demselben Berührungspunkt q und den anderen Punkten P', P''', P^{V} stets dasselbe Verhältniß, wie die entsprechenden Produkte der Segmente zu einander, welche vom andern Berührungspunkte q' ausgehen, d. h. es ist

$$qP.\ qP''.\ qP^{IV} : qP'.\ qP'''.\ qP^{V} = q'P.\ q'P''.\ q'P^{IV} : q'P'\ q'P'''.\ q'P^{V}.$$

Beweis

folgt aus Lehrsatz LXXXIX, indem ADBECF als ein Vieleck von 2 n Seiten angesehen werden kann, in welchem je zwei Seiten AD, DB; BE, EC; CF, FA eine gerade Linie bilden.

Aufgabe.

In einem Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen einzelne Seiten durch eben so viele in gerader Linie liegende Punkte gehen.

Digitized by Google

Auflösung.

Die Zahl der Seiten ist entweder eine gerade oder ungerade.

(Figur 86).

I) Im ersteren Fall ziehe man von einem beliebigen Punkt *A* im Umfange des Kreises nach dem ersteren p der gegebenen Punkte p, p′, p″, p‴, pᴵᵛ, pᵛ ꝛc. die Gerade Ap, welche den Kreis in B schneide, von diesem Punkt B zieht man wieder die Gerade Bp′ nach dem zweiten der gegebenen Punkte p′, vom Durchschnitt C die Cp″ u. s. w., bis zum letzten Punkt F; verbindet man endlich A mit F, so geht die AF durch den letzten der gegebenen Punkte pᵛ (Lehrsatz LXXXVI). Ginge AF nicht durch pᵛ so wäre die Auflösung unmöglich; ist sie aber möglich, so gibt es wegen der willkührlichen Annahme des Punktes A unendlich viele Auflösungen.

(Figur 89).

IIter Fall. Die Zahl der Seiten sei eine ungerade 2 n — 1.

Man ziehe wieder von einem beliebigen Punkt a im Umfange des Kreises die Gerade ap, welche den Kreis in b schneidet, sodann die bp′ u. s. w. von den einzelnen Durchschnittspunkten Gerade nach den gegebenen Punkten, so wird das Vieleck abc .... sich entweder von selbst schließen oder nicht. Im ersteren Fall ist die Aufgabe gelöst, im zweiten Fall verbinde man den letzten der erhaltenen Durchschnittspunkte d mit dem ersten a durch die Gerade ad und verlängere dieselbe, bis sie die gegebene Linie pp′p″ in einem Punkte q durchschneidet; zu q construire man die Polare AA′ und beginne jetzt von A oder A′ dieselbe Construktion, die man vorher mit a begonnen hat, so thut das auf diese Weise erhaltene Vieleck der Aufgabe Genüge.

Beweis

folgt für den 1sten Fall unmittelbar aus Lehrsatz LXXXVI; im zweiten Fall erhält man nach der ersten vom a ausgehenden Construktion ein Vieleck abcd von 2 n Seiten, welche einzeln durch die Punkte p, p′, p″ ..... q gehen.

Das Vieleck ABC ..... kann aber ebenfalls als ein Vieleck von 2 n Seiten angesehen werden, welche wieder einzeln durch dieselben 2 n Punkte gehen; da aber die eine dieser Seiten die Richtung der Tangente Aq hat, so ist die durch A gehende letzte Seite = 0; mithin hat man wirklich nur

Digitized by Google

ein Vieleck von 2 n — 1 Seiten, welch letztere einzeln durch die Punkte p, p', p'' geben, wie verlangt wurde.

Aufgabe.

Um einen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Ecken sämmtlich auf eben so vielen durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden liegen.

Auflösung.

Die Zahl der Ecken ist entweder gerade oder ungerade.

(Figur 87).

(I) Im ersteren Fall zieht man von einem auf einer der gegebenen Geraden OA willkürlich genommenen Punkt A an den Kreis die Tangente AB, von B, dem Durchschnitt mit OB die Tangente BC u. s. w., so erhält man das Vieleck ABCDEF....., welches der Aufgabe Genüge thut (Lehrsatz LXXXVII). Würden die beiden letzten Tangenten EF und AF sich nicht auf der letzten gegebenen Geraden AF durchschneiden, so wäre die Auflösung unmöglich; ist sie aber möglich, so gibt es wegen der willkürlichen Annahme des Punktes A unendlich viele Auflösungen.

(Figur 90).

II. Fall. Die Zahl der Ecken sei eine ungerade. 2n — 1.

Man ziehe wieder von einem beliebigen Punkt a auf einer der Geraden OA an den Kreis die Tangenten ab, ac, welche die Geraden OB, OC in b und c treffen und setze dies Verfahren fort bis man auf sämmtlichen gegebenen Geraden OA, OB, OC..... die Durchschnittspunkte a, b, c ..... mit den entsprechenden Tangenten erhalten hat; schließt sich nun das Vieleck abc..... von selbst, so ist die Aufgabe gelöst; schließt es sich aber nicht, so ziehe man von den letzten Punkten b, c abermals die Tangenten bd, cd an den Kreis, welche sich in d schneiden, verbinde endlich O mit d und ziehe von einem der Durchschnittspunkte D der Od mit dem Kreis an letzteren die Tangente BC, von B und C setze man die Construktion fort wie vorher von a, so erhält man ein Vieleck ABC ..... welches der Aufgabe Genüge thut.

Beweis

folgt für den ersten Fall unmittelbar aus Lehrsatz LXXXVII, im zweiten Fall erhält man nach der ersten von a ausgehenden Construktion

Digitized by Google

ein Vieleck abcd .... von 2 n Ecken, welche einzeln auf den Geraden OA, OB, OC, OD liegen.

Das Vieleck ABC.... kann aber ebenfalls als ein Vieleck von 2 n Ecken angesehen werden, welche wieder einzeln auf denselben 2 n Geraden liegen; da aber eine dieser Ecken (D) in der Geraden BC liegt, so hat man nur ein Vieleck ABC..... von 2 n—1 Ecken, welche letztere einzeln auf den Geraden OA, OB, OC..... liegen, wie verlangt wurde.

---

c. Mehrere Kreise in Verbindung mit einander. Potenzlinie und Potenzpunkte. Aufgaben über die Berührungen.

Lehrsatz XCI.

Wenn in einer Ebene drei Kreise gegeben sind, und man zieht an je zwei derselben die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten oder auch an ein Paar derselben die äußern und an die beiden anderen Paare die inneren Tangenten, so liegen die drei Durchschnittspunkte dieser Tangenten stets in gerader Linie.

Beweis I.

folgt aus Lehrsatz LXV und Lehrsatz LXVI, weil je zwei Kreise als ähnliche und ähnlich liegende Vielecke von unendlich vielen Seiten angesehen werden können, deren Aehnlichkeitspunkte daher mit den Durchschnittspunkten der gemeinsamen Tangenten zusammenfallen.

Beweis II.

(Figur 91, a und b).

Bezeichnet man die Radien der Kreise, deren Mittelpunkte A, B, C sind, einzeln mit R, R', R'' und zieht die Radien zu den Berührungspunkten der einzelnen Tangenten, so hat man

$$R : R' = AM : BM.$$
$$R' : R'' = BP : CP.$$
$$R'' : R = CN : AN.$$

Digitized by Google

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden ersten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden letzten Glieder, d. h. es ist

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP.$$

mithin liegen die Punkte M, N, P in gerader Linie.

Beweis III

folgt aus Lehrsatz XLVII, wenn man sich über den drei Parallelen AB, CD, EF, Figur 41, a und b als Durchmessern Kreise beschrieben denkt.

Lehrsatz XCII.

Wenn in einer Ebene drei Kreise gegeben sind und man zieht an je zwei derselben die gemeinschaftlichen inneren Tangenten oder auch an ein Paar derselben die gemeinsamen inneren und an die beiden anderen Paare die äußeren Tangenten, so haben die Durchschnittspunkte dieser Tangenten eine solche Lage, daß, wenn man den Mittelpunkt jedes Kreises mit dem Durchschnittspunkt der Tangenten der beiden anderen Kreise verbindet, diese drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte durchschneiden.

Beweis 1.

(Figur 91, a, und b.)

Bezeichnet man wieder die Radien der drei Kreise einzeln mit R, R′, R″, so hat man

$$R : R' = AM' : BM'$$
$$R' : R'' = BP' : CP'$$
$$R'' : R = CN' : AN'.$$

Multiplizirt man diese Proportionen in einander, so werden die beiden ersten Glieder identisch; daraus folgt die Gleichheit der beiden letzten, d. h. es ist

$$AM'.\ BP'.\ CN' = AN'.\ BM'.\ CP'$$

mithin schneiden sich die Geraden AP′, BN′, CM′ in einem und demselben Punkt (Lehrsatz IV).

Beweis 2.

folgt aus Lehrsatz XLVIII, wenn man sich über den drei Parallelen AB, CD, EF, Figur 43, a und b, als Durchmessern Kreise beschrieben denkt.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Die Linien AB, AC, BC, welche die Mittelpunkte der einzelnen Kreise verbinden, werden einzeln in den Punkten M, M', N, N', P, P' harmonisch getheilt.

Zusatz 2.

Aus Verbindung von Lehrsatz XCI und Lehrsatz XCII folgt, daß nicht nur die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte M, N, P unter sich, sondern daß auch jeder dieser Punkte mit den beiden andern entsprechenden inneren Aehnlichkeitspunkten (M mit N', P'; N mit M', P'; P mit M', N') in gerader Linie liegt. Die 6 Aehnlichkeitspunkte M, N, P, M', N', P' liegen daher auf vier Geraden, von welchen die eine MNP, die äußere Aehnlichkeitsaxe, die drei anderen die inneren oder inversen Aehnlichkeitsaxen genannt werden.

Zusatz 3.

Berührt ein Kreis (C) zwei andere (A) (B) gleichartig, d. h. beide entweder von innen, Figur 92, a, oder beide von außen, Figur 92, b, so liegen die beiden Berührungspunkte mit dem äußeren Aehnlichkeitspunkt der Kreise (A) (B) stets in gerader Linie. Im ersten Fall sind nämlich die Berührungspunkte N, P die äußeren, im zweiten die Punkte N', P' die inneren Aehnlichkeitspunkte der Kreise (A) (C), so wie der Kreise (B) (C).

Zusatz 4.
(Figur 93.)

Berührt ein Kreis (C) zwei andere (A) (B) ungleichartig, d. h. den einen (A) von innen, den anderen (B) von außen, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt M' der beiden letzten mit den Berührungspunkten N, P' in gerader Linie.

Aufgabe.

Die beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise (A) (B) zu finden, welche in einander liegen.

Auflösung 1.
(Figur 94.)

Man ziehe durch die Mittelpunkte A, B die parallelen Durchmesser a, a', b, b' und verbinde die Endpunkte a, b; a, b' durch die Geraden

Digitized by Google

ab, ab', so sind die Punkte M und M', in welchen diese Geraden der Mittelpunktslinie AB begegnen, die gesuchten Aehnlichkeitspunkte.

Beweis.

Bezeichnet man die Radien der Kreise (A) und (B) mit R und R', so ist:

$$AM : BM = R : R'$$
$$AM' : BM' = R : R'$$

mithin sind M und M' die verlangten Punkte (Lehrsatz LXIV).

Auflösung 2.

Man construire einen dritten Kreis (C), der ganz außerhalb der Kreise (A) und (B) fällt, und bestimme sowohl die äußern als innern Aehnlichkeitspunkte des Kreises (C) mit den beiden andern. Sind erstere N, P, letztere N', P', so gehen PN und P'N' durch den äußeren, PN' und NP' durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise (A) und (B).

Aufgabe.

Es sind zwei in einer Ebene liegenden Kreise gegeben: man soll den geometrischen Ort bestimmen, von welchem die an beide Kreise gezogenen Tangenten einander gleich sind.

Auflösung.

Bei dieser Aufgabe sind vier Fälle zu unterscheiden:

1) Die Kreise schneiden sich, Figur 95, a.
2) Die Kreise berühren sich, Figur 95, b und c.
3) Die Kreise liegen in einander, Figur 95, d.
4) Die Kreise liegen außer einander, Figur 95, e.

In allen vier Fällen ist der geometrische Ort eine gerade Linie und zwar für

1) die beiden Kreisen gemeinsame Sekante,
2) die gemeinsame Tangente,

für 3) u. 4) die durch den Durchschnitt y der Sekanten ab und cd, welche beide Kreise (A) und (B) mit einem beliebigen dritten Kreis (C) gemein haben, auf die Mittelpunktslinie der beiden ersten Kreise senkrecht gezogene Gerade xy.

Digitized by Google

Beweis.

Man ziehe von einem beliebigen Punkt x der xy die Tangenten xt und xt′ an die Kreise (A) und (B), so ist zu zeigen, daß diese Tangenten einander gleich sind. Nennt man nun die Radien der Kreise (A) und (B) R und R′, so ist

für 1) Figur 95, a:

$$xt^2 = xa.\ xb \text{ und}$$
$$xt'^2 = xa.\ xb, \text{ folglich}$$
$$xt = xt';$$

für 2) Figur 95, b und c:

$$xt = xP \text{ und}$$
$$xt' = xP, \text{ folglich}$$
$$xt = xt';$$

für 3) und 4) Figur 95, d und e:

$$xt^2 = xA^2 - R^2$$
$$xt'^2 = xB^2 - R'^2.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} xA^2 - xB^2 &= AP^2 - BP^2 \\ &= Ay^2 - By^2 \\ &= ya.\ yb + R^2 - (yc.\ yd + R'^2) \\ &= R^2 - R'^2. \text{ Daher} \\ xA^2 - R^2 &= xB^2 - R'^2 \text{ d. h.} \\ xt^2 &= xt'^2 \text{ also} \\ xt &= xt'. \end{aligned}$$

Erklärung.

Die vorher bestimmte Linie xy heißt die Potenzlinie der Kreise (A) und (B), weil nämlich die von irgend einem Punkt x derselben (Fig. 95 a) durch beide Kreise gezogenen Sekanten stets eine constante Potenz

$$xp.\ xq = xp'.\ xq' = xt^2$$

bilden, wo auch der Punkt x auf der Linie xy angenommen und wie immer die Sekanten gezogen sein mögen. Ein aus einem solchen Punkt x mit der Tangente xt beschriebener Kreis heißt der Potenzkreis der Kreise (A) und (B). Derselbe schneidet dieselben unter einem rechten Winkel. Liegt der Punkt x innerhalb der Kreise (A) und (B), so ist der Radius des Potenzkreises gleich der Hälfte der durch diesen Punkt in jedem der beiden Kreise gezogenen kürzesten Sehne.

Digitized by Google

Lehrsatz XCIII.

Die Mitten der vier Tangenten, welche zwei außer einander liegenden Kreisen gemeinsam sind, liegen stets in gerader Linie.

Beweis.

Diese Mitten liegen offenbar auf der Potenzlinie der beiden Kreise, also auf einer und derselben Geraden.

Lehrsatz XCIV.

Sind drei Kreise in einer Ebene gegeben und man construirt zu je zweien die zugehörigen Potenzlinien, so schneiden sich diese drei Potenzlinien in einem und demselben Punkt.

Beweis.

(Figur 96, a und b.)

Der Durchschnitt der Geraden xy und x'y' sei O, so ist O sowohl für die Kreise (*A*) und (*B*) als für die Kreise (*A*) und (C) ein gemeinsamer Potenzpunkt. Daher sind auch die Potenzen dieses Punktes für die Kreise (B) und (*C*) gleich, d. h. er liegt auf der Potenzlinie x''y'' der Kreise (B) und (C) oder es schneiden sich alle drei Potenzlinien in einem und demselben Punkt.

Zusatz.

Berühren drei Kreise einander, so schneiden sich die durch die Berührungspunkte gezogenen Tangenten in einem und demselben Punkt. Berührt ein Kreis (C) zwei andere (A) und (B), so treffen die durch die Berührungspunkte gezogenen Tangenten stets auf der Potenzlinie der Kreise (*A*) und (B) zusammen. — Gehen mehrere Kreise durch zwei feste Punkte, so ist die durch diese Punkte gezogene Gerade eine sämmtlichen Kreisen gemeinsame Potenzlinie.

Aufgabe.

Es sind drei Kreise gegeben: man soll in der Ebene dieser Kreise einen Punkt O so bestimmen, daß die sechs von diesem Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten einander gleich werden.

Digitized by Google

Auflösung.

Der gesuchte Punkt ist kein anderer, als der Potenzpunkt oder der Durchschnittspunkt der drei Potenzlinien (Lehrsatz XCIV).

Aufgabe.

Es sind im Kreis zwei Punkte gegeben: man soll einen zweiten Kreis construiren, welcher den ersten Kreis berührt und durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Auflösung.
(Figur 97.)

Es sei (A) der gegebene Kreis, p und q die gegebenen Punkte; man errichte in der Mitte von pq die Senkrechte xy und beschreibe aus einem beliebigen Punkt B derselben mit Bp = Bq einen Kreis, der den Kreis (A) in a und b schneidet, verlängere ab, bis sie die pq in O schneidet, ziehe von O an den Kreis (A) die Tangenten At und At' und verlängere endlich *At* und *At'*, bis sie die in der Mitte von pq errichtete Senkrechte in x und y treffen, so sind x und y die Mittelpunkte, xp, yp die Radien zweier Kreise, welche beide der Aufgabe Genüge thun.

Beweis.

Da die Kreise (*B*), (x), (y) sämmtlich durch die Punkte p und q gehen, so ist pq ihre gemeinsame Potenzlinie, mithin der Punkt O als Durchschnitt von ab und pq der gemeinsame Potenzpunkt für die Kreise (A), (B), (x), (y). — Weil aber Ot und Ot' Tangenten an (A) sind, so berühren die Kreise (x) und (y) den Kreis (A) in t und t', wie verlangt wurde.

Aufgabe.

Es sind eine gerade Linie und außerhalb derselben zwei Punkte gegeben: man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebene Linie berührt und zugleich durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Auflösung.
(Figur 98.)

Die gegebene Linie sei AB, und p und q die gegebenen Punkte; man verlängere pq, bis sie der *AB* in O begegnet, errichte in der Mitte

Digitized by Google

von pq eine Senkrechte xy und beschreibe aus einem Punkt C derselben mit Cp einen Kreis, ziehe von O an diesen Kreis eine Tangente Ot und mache endlich auf AB sowohl Ot' als Ot'' gleich AB; alsdann sind t' und t'' die Berührungspunkte der gesuchten Kreise, mithin bestimmen die Senkrechten t'x und t''y die Mittelpunkte x und y zweier Kreise, welche beide der Aufgabe Genüge thun.

Beweis.

Da pq eine den Kreisen (C) (x) und (y) gemeinsame Potenzlinie ist, so müssen auch die von einem Punkt O derselben an alle drei Kreise gezogenen Tangenten Ot', Ot, Ot'' einander gleich sein: daraus aber folgt die Richtigkeit unserer Construktion.

Lehrsatz XCV.

(Figur 99.)

Wenn man aus beliebig vielen Punkten B, B', B'' der Potenzlinie zweier Kreise (A) und (A') mit den entsprechenden Tangenten die Potenzkreise (B), (B'), (B'') beschreibt, so gehen diese sämmtlich durch zwei unveränderliche Punkte M, N, welche auf der Mittelpunktslinie der Kreise (A) (A') liegen.

Beweis.

Da die Kreise (B), (B'), (B'') sämmtlich die Kreise (A), (A') rechtwinkelig schneiden, so werden sie ebenfalls von den Kreisen (A), (A') rechtwinkelig geschnitten; dieses ist aber nur dann möglich, wenn AA' ihre gemeinsame Potenzlinie ist, oder wenn alle anderen Kreise B', B'' durch dieselben auf AA' gelegenen Punkte M, N gehen, durch welche einer derselben (B) geht.

Zusatz 1.

Die Durchmesser DE, DE' der Kreise (A), (A') werden in den Punkten M und N harmonisch getheilt, d. h. es ist

$$DM : ME = DN : NE.$$

Digitized by Google

Beweis.

Da $Bt^2 = BD.BE$ und $Bt = BM$, so ist auch
$BM^2 = BD.BE$ oder
$BD : BM = BM : BE$ folglich
$BD + BM : BD - BM = BM + BE : BM - BE$
und da $BM = BN$, so ergibt sich weiter:
$DN : DM = NE : ME$ oder versetzt
$DM : ME = DN : NE$. Eben so findet man
$D'M : ME' = D'N : NE'$.

Zusatz 2.

Würden sich die Kreise (A) und (A') berühren, so wäre BB' ihre gemeinschaftliche Tangente; die Punkte M und N fielen alsdann mit dem Berührungspunkt B zusammen und man hätte 2 Gruppen von Kreisen (A), (A'), (A'') und (B), (B'), (B''), in welchen die Mittelpunktslinien der einen Gruppe eine gemeinsame Tangente für die andere Gruppe wäre und umgekehrt.

Lehrsatz XCVI.

(Figur 100).

In zwei sich rechtwinkelig schneidenden Kreisen wird immer der Durchmesser des einen Kreises harmonisch getheilt durch die Peripherie des andern, d. h. es ist:

$$DM : ME = DN : NE.$$

Beweis.

Es ist $OE^2 = Ot^2 = OM.ON$.

Da nun O in der Mitte von DE liegt, so sind die Punkte D, M, E, N vier harmonische Punkte, d. h. es ist

$$DM : ME = DN : NE.$$

(Siehe arithmetische Eigenschaften der harmonischen Proportion II).

Eben so erhält man:

$$dm : me = dn : ne.$$

Digitized by Google

Erklärung.

Aehnlichkeitspolaren zweier Kreise heißen die beiden Geraden, welche als Polaren zu ihren Aehnlichkeitspunkten gehören und zwar äußere Aehnlichkeitspolaren, wenn sie die Polaren des äußern, innere Aehnlichkeitspolaren, wenn sie die Polaren des inneren Aehnlichkeitspunktes sind.

Lehrsatz XCVII.

(Figur 101, a. und b).

Werden zwei Kreise (A), (B) von einem dritten (P) berührt, so wird der dritte Kreis von der Potenzlinie der beiden ersten unter denselben Winkeln geschnitten, wie die beiden ersten von ihren Aehnlichkeitspolaren, und zwar von den äußeren, wenn die Berührung gleichartig, von den inneren, wenn sie ungleichartig ist.

Beweis 1.

Es seien a, b, p die Pole der Aehnlichkeitsaxe St, (Lehrsatz XCII, Zusatz 2) so sind die von a, b auf die Mittelpunktslinie AB gefällten Senkrechten die Aehnlichkeitspolaren der Kreise (*A*) und (*B*). Denn da die Polare von S durch a geht (Lehrsatz LXVII, Zusatz 2) und auch auf AB senkrecht steht, so kann sie keine andere als aa′ sein. Dasselbe gilt von bb′ in Bezug auf den Kreis (B). Die Tangenten tp, t′p schneiden sich aber auf der Potenzlinie der Kreise (A), (B), (Lehrsatz XCIV, Zus.) mithin ist die von p auf AB gefällte Senkrechte pp′ die Potenzlinie selbst. Da ferner

$\angle$ t′bv = $\angle$ taw = $\angle$ tpt′ und die Linien aa′, bb′, pp′ parallel sind, so schneiden die letzten die entsprechenden Kreise (*A*), (B), (P) unter denselben Winkeln.

Zusatz.

(Figur 102, a, b, c).

Werden zwei Kreise (*A*) (B) von zwei anderen (C) (D) berührt, so liegt ein Aehnlichkeitspunkt der ersteren auf der Potenzlinie der letzteren und ein Aehnlichkeitspunkt der letzteren auf der Potenzlinie der ersteren, und zwar der äußere Aehnlichkeitspunkt, wenn die Berührung gleichartig, der inneren, wenn sie ungleichartig ist.

Digitized by Google

Da nämlich die Kreise (C), (D) von der Potenzlinie der Kreise (A), (B) unter denselben Winkeln geschnitten werden, so ist diese Potenzlinie eine homologe Linie der Kreise (C), (D), d. h. sie geht durch einen Aehnlichkeitspunkt derselben.

Lehrsatz XCVIII.

(Figur 103, a und b).

Werden drei Kreise (A), (B), (C) von einem vierten Kreise (x) berührt, so hat der gemeinsame Potenzpunkt r der drei ersten Kreise ganz dieselbe Lage im vierten Kreis, wie die Pole α, β, γ einer der Aehnlichkeitsaxen in jedem der drei ersten Kreise, und zwar die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe, wenn der vierte Kreis die drei ersten gleichartig berührt, hingegen die Pole einer der inneren Aehnlichkeitsaxen, wenn der vierte Kreis die drei anderen Kreise ungleichartig berührt. Im letzteren Fall ist diejenige Aehnlichkeitsaxe verstanden, welche durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt M derjenigen zwei Kreise (A), (B) geht, die gleichartig vom Kreise (x) berührt werden.

Beweis.

Da die Potenzlinien der Kreise (A), (B), (C) im Kreise (x) dieselbe Lage haben, wie die Aehnlichkeitspolaren der drei ersten Kreise in diesen Kreisen, so hat auch der gemeinsame Durchschnitt r der Potenzlinien eine homologe Lage mit den einzelnen Durchschnitten α, β, γ der Aehnlichkeitspolaren. Diese Durchschnitte sind aber einzeln die Pole für die Aehnlichkeitsaxe MN.

Zusatz.

Da r mit α, β, γ homolog liegt, so gehen die Geraden rα, rβ, rγ einzeln durch die Berührungspunkte des vierten Kreises (x) mit den drei ersten Kreisen (A), (B), (C). Diese Berührungspunkte sind nämlich einzeln die Aehnlichkeitspunkte für (x) und jeden der Kreise (A), (B), (C).

Aufgabe.

Einen Kreis (x) zu beschreiben, der drei gegebene Kreise (A), (B) (C) berührt.

Digitized by Google

Auflösung.

(Figur 103, a. und b.)

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Der gesuchte Kreis soll die gegebenen Kreise gleichartig berühren.

2) Der gesuchte Kreis soll zwei Kreise gleichartig den dritten ungleichartig (z. B. jene umschließend, diesen von außen) berühren.

Im ersten Fall verbinde man den gemeinsamen Potenzpunkt r der Kreise (A), (B), (C) mit den Polen α, β, γ der äußeren Aehnlichkeitsare MN in Bezug auf jeden dieser Kreise, so geben die Verbindungslinien durch ihren Durchschnitt mit den einzelnen Kreisen (A), (B), (C) die Berührungspunkte des gesuchten Kreises. Dieser Durchschnittspunkte sind sechs und daher erhält man zwei Kreise (x) (y), welche der Aufgabe Genüge thun. Die zusammengehörigen Berührungspunkte sind dadurch leicht zu unterscheiden, daß die Verbindungslinien derselben mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise sich einzeln in x und y durchschneiden. Im zweiten Fall ist die Construktion dieselbe, nur daß man statt der äußeren Aehnlichkeitsare der drei gegebenen Kreise diejenige innere zu nehmen hat, welche durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt derjenigen zwei Kreise geht, welche gleichartig berührt werden sollen.

Beweis

folgt aus Lehrsatz XCVIII.

Lehrsatz IC.

(Figur 103, a und b.)

Werden drei Kreise (A), (B), (C) von einem vierten (x) oder (y) berührt und man zieht aus den einzelnen Aehnlichkeitspunkten M, N, P mit der an den berührenden Kreis (x) oder (y) gezogenen Tangente oder der halben kürzesten Sehne als Radien Kreise, so haben diese drei Kreise (M), (N), (P) stets eine und dieselbe Potenzlinie, welche auf der Aehnlichkeitsare MN senkrecht steht.

Beweis.

Da die Aehnlichkeitspunkte M, N, P einzeln auf der Potenzlinie der Kreise (x) und (y) liegen (Lehrsatz XCVII, Zusatz), so werden diese

Digitized by Google

letzten Kreise von den aus M, N, P gezogenen Potenzkreisen rechtwinkelig geschnitten oder was dasselbe ist, die Kreise (M), (N), (P) werden von den Kreisen (x) (y) rechtwinkelig geschnitten. Man hat also zwei Gruppen sich rechtwinkelig schneidender Kreise; daher ist die Mittelpunktslinie xy der einen Gruppe die Potenzlinie der andern Gruppe (M), (N) (P) und steht auf der Mittelpunktslinie MN derselben senkrecht.

Lehrsatz C.

Sind in einer Ebene drei Kreise gegeben, so kann man acht verschiedene Kreise construiren, welche die drei ersten berühren. Die Mittelpunkte dieser acht Kreise liegen je zwei und zwei auf den Senkrechten, welche vom gemeinsamen Potenzpunkt der drei gegebenen auf ihre vier Aehnlichkeitsaxen gezogen werden.

Beweis.

Die gegebenen Kreise seien (A), (B), (C), so kann der vierte Kreis berühren:

1) Alle drei von innen (umschließend). (Siehe den Kreis (x), Figur 103, a).
2) Alle drei von außen. (Siehe den Kreis (y), Figur 103, a).
3) Die Kreise (A) und (B) von innen (umschließend), den Kreis C von außen. (Siehe den Kreis (x), Figur 103, b).
4) Die Kreise (A) und (B) von außen, den Kreis C von innen (umschließend). (Siehe den Kreis y, Figur 103, b).
5) Die Kreise (A) und (C) von innen (umschließend) den Kreis (B) von außen.
6) Die Kreise (A) und (C) von außen, den Kreis (B) von innen (umschließend).
7) Die Kreise (B) und (C) von innen (umschließend) den Kreis (A) von außen.
8) Die Kreise (B) und (C) von außen, den Kreis (A) von innen (umschließend).

Der zweite Theil des Satzes folgt aus Lehrsatz IC, und zwar liegen, wenn die äußeren Aehnlichkeitspunkte der drei gegebenen Kreise mit M, N, P, die entsprechenden inneren mit M', N', P' bezeichnet werden, die Mittelpunkte der berührenden Kreise

Digitized by Google

(1) und (2) auf der vom Potenzpunkt auf die äußere Aehnlichkeitsare MN gezogenen Senkrechten.
(3) und (4) auf der vom Potenzpunkt auf die Aehnlichkeitsare MN'P' gefällten Senkrechten.
(5) und (6) auf dem vom Potenzpunkt auf NM'P' gefällten Perpendikel.
(7) und (8) auf der vom Potenzpunkt auf die Aehnlichkeitsare PM'N' senkrecht errichteten Geraden.

Zusatz 1.

Die vier Aehnlichkeitsaren der Kreise (A), (B), (C) sind zugleich die Potenzlinien der vier Paare berührender Kreise. Zieht man von dem gemeinsamen Potenzpunkt der gegebenen Kreise Gerade nach den zwölf Polen der vier Aehnlichkeitsaren, so bestimmen diese zwölf Geraden die vier und zwanzig Berührungspunkte der acht gesuchten Kreise mit den drei gegebenen Kreisen.

Zusatz 2.

(Figur 103, a u. b.)

Da die Kreise (A), (B), (C) einzeln die Kreise (x) (y) berühren, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden letzten auf allen drei Potenzlinien der ersten (Lehrsatz XCVII, Zusatz), mithin in ihrem gemeinsamen Durchschnitt r. Dieser Punkt r ist daher der gemeinsame Potenzpunkt für alle Kreise, welche die Kreise (x) und (y) zugleich berühren. Schneiden sich nun die Kreise (x) und (y), so kann man ihre beiden Durchschnitte als zwei berührende Kreise vom Radius 0 betrachten, welche daher mit (A), (B), (C) denselben Potenzpunkt r haben. Daraus folgt daß der aus r beschriebene gemeinsame Potenzkreis auch durch die Durchschnitte der Kreise (x) und (y) geht (Figur 103, b), und mit den letzteren dieselbe Potenzlinie MN hat. — Um daher die acht Kreise zu construiren, welche drei gegebene Kreise berühren, hat man nur aus dem gemeinschaftlichen Potenzpunkt r den gemeinsamen Potenzkreis zu ziehen und durch die zwei Punkte, in welchen derselbe einzeln die Aehnlichkeitsaren durchschneidet, zwei Kreise (x) und (y) zu legen, welche einen der gegebenen Kreise (A), (B), (C) berühren. (Siehe die Aufgabe: einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis berührt und zugleich durch zwei gegebene Punkte geht).

Digitized by Google

Zusatz 3.

(Figur 103, a, und b.)

Verbindet man die Berührungspunkte t, t′ des Kreises (A) mit den Kreisen (x), (y) durch die Gerade tt′, so geht diese sowohl durch r, den inneren Aehnlichkeitspunkt von (x) und (y), (Lehrs. XCII, Zus. 3) als durch α, den Pol von MN. (Siehe die Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt). Da nun der Pol einer geraden Linie durch den Durchschnitt der Polaren von zwei in ihr liegenden Punkten bestimmt wird, so liegt der Pol von tt′, d. h. der Durchschnitt der in t und t′ an den Kreis (A) gezogenen Tangenten in dem Durchschnitt der Polaren der Punkte r und α. Construirt man daher die drei Aehnlichkeitspolaren des gemeinsamen Potenzpunktes r für die drei gegebenen Kreise (A), (B), (C) und zugleich die vier Aehnlichkeitsaxen, so schneiden sich diese Linien in zwölf solchen Punkten, daß die von diesen Punkten an die Kreise (A), (B), (C) gezogenen Tangenten die vier und zwanzig Berührungspunkte der gesuchten acht Kreise mit den gegebenen Kreisen (A), (B), (C) bestimmen.

Aufgabe.

(Figur 104.)

Es sind zwei gerade Linien *AB*, *CD* und ein Kreis (O) gegeben: man soll einen zweiten Kreis bestimmen, der sowohl die gegebenen Geraden, als den Kreis (O) berühre.

Auflösung.

Man beschreibe um den Kreis (O) ein Parallelogramm, dessen einzelne Seiten mit den Geraden *AB*, *CD* parallel sind und verbinde den Durchschnitt r der gegebenen Geraden mit jeder Ecke dieses Parallelogramms, so erhält man vier gerade Linien, welche im Allgemeinen den Kreis in acht Punkten schneiden; diese acht Punkte sind nun die Berührungspunkte acht verschiedener Kreise, welche der Aufgabe Genüge thun. Um die Mittelpunkte dieser Kreise zu finden, hat man nur vom Mittelpunkt O des gegebenen Kreises durch jeden der gefundenen Berührungspunkte t, t′ eine Gerade zu ziehen und dieselbe zu verlängern, bis sie die Halbirungslinie des Winkels der gegebenen Geraden durchschneidet; dann ist der Punkt x, in welchem dieses Schneiden Statt hat, der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises.

Digitized by Google

Beweis.

Man sehe die Geraden AB, CD als Kreise von unendlich großen Radien an, so wird dadurch die vorliegende Aufgabe auf die schon gelöste zurückgeführt: einen vierten Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt. Bei dieser Voraussetzung ist aber der Durchschnittspunkt r der gemeinsame Potenzpunkt, und die beiden vom Mittelpunkt O des Kreises auf die gegebenen Geraden gefällten Senkrechten bestimmen durch ihren Durchschnitt mit dem Kreise die Aehnlichkeitspunkte M, M′, N, N′; mithin sind MN, MN′, NM′, M′N′ die vier Aehnlichkeitsaxen und α, β, γ, δ ihre Pole. Diese Pole sind aber zugleich die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten mit den gegebenen Geraden parallel sind. Die Richtigkeit dieser Auflösung folgt daher aus dem Beweis für die Richtigkeit der allgemeinen Auflösung. (Siehe auch Lehrsatz C, Zusatz I).

Anmerkung.

Da eine gerade Linie immer als ein Kreis von unendlich großem Halbmesser und ein Punkt als ein Kreis vom Radius O angesehen werden kann, so sind in der Auflösung der allgemeinen Aufgabe: an drei gegebene Kreise einen vierten berührenden Kreis zu ziehen, alle diejenigen speziellen Fälle enthalten, in welchen ein oder mehrere Kreise durch Punkte oder gerade Linien ersetzt sind.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

Aufgabe I.

Die Entfernung zweier Gegenstände von einander zu bestimmen, wenn einer derselben unzugänglich ist.

Auflösung 1.

(Figur 1, a und b).

AM sei die gesuchte Entfernung, M der unzugängliche Punkt. Man nehme B in der Verlängerung von *AM* und C beliebig, sodann wähle man den Punkt P in der Linie BC so, daß man von ihm nach M visiren kann, bestimme N den Durchschnitt von *AC* und MP, und messe die Linien AB, *BP*, CP, *AN* und CN.

Es sei

$AB = a$, $BP = b$, $CP = c$, $AN = d$, $CN = f$, $AM = x$,

dann ist nach Lehrsatz I

$$AM.\ BP.\ CN = AN.\ BM.\ CP$$

oder, wenn man substituirt:

$$x.\ bf = d\ (a + x)\ c, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{acd}{bf - cd}.$$

Digitized by Google

Zusatz.

Nimmt man P in der Mitte von BC, so ist

$$b = c, \text{ mithin } x = \frac{ad}{f - d.}$$

Auflösung 2.

(Figur 33.)

AB sei die gesuchte Entfernung, A der unzugängliche Punkt. Man nehme E in der Verlängerung von AB und Q willkürlich. Auf EQ bezeichne man einen beliebigen Punkt *F* und bestimme alsdann D den Durchschnitt von AF und B*Q*. Ferner bestimme man C, den Durchschnitt von BF und DE, so wie G den Durchschnitt von QC und *AB* und messe endlich EG und BG. Es sei EG = a, BG = b. Nun ist nach Lehrsatz XXXVIII:

$$EG : BG = EA : BA$$

oder, wenn man für EG und BG die Werthe substituirt und die gesuchte Entfernung AB mit x bezeichnet:

$$a : b = a + b + x : x \text{ mithin}$$

$$x = \frac{b\,(a + b)}{a - b.}$$

Anmerkung.

(Figur 33.)

Erlaubt die Lage der Gegend nicht, sich auf irgend einer Seite weit von der zu messenden Distanz zu entfernen, so kann man auf folgende Weise verfahren. Es sei AO die zu messende Distanz. Man wähle B und D mit O in gerader Linie, aber zu verschiedenen Seiten desselben, sodann nehme man E auf AB beliebig und bestimme C den Durchschnitt von AO und ED. Ferner bestimme man *F* den Durchschnitt von *AD* und BC und P den Durchschnitt von AO und EF, endlich messe man *PC* = a, OC = b. Dann ist wieder nach Lehrsatz XXXVIII

$$PC : OC = AP : AO$$

mithin, wenn man die zu suchende Distanz AO = x setzt, wieder, wie vorhin

$$a : b = a + b + x : x \text{ folglich}$$

$$x = \frac{b\,(a + b)}{a - b.}$$

Digitized by Google

Aufgabe II.

(Figur 4, a und b).

Es ist eine Linie BC und außerhalb derselben ein Punkt M gegeben: man soll eine zweite Linie abstecken, welche durch M geht und der Linie BC parallel ist.

Auflösung.

Man messe BC und bestimme den Punkt P in der Mitte von BC, nehme A in der Verlängerung von BM und bestimme den Durchschnittspunkt O der Linien AP und CM; man verlängere sodann die Linie BO, bis sie die AC in N trifft, so liegt dieser Punkt N in der verlangten Parallelen, d. h. es ist MN parallel mit BC (Lehrsatz III, Zusatz 2).

Aufgabe III.

(Figur 5).

Es sind 2 Parallelen BC und QS gegeben: man soll durch einen gegebenen Punkt A eine dritte Linie AO mit den beiden gegebenen parallel ziehen, ohne dabei irgend eine Linie messen zu können.

Auflösung.

Man nehme den Punkt M in der Verlängerung von AB, und bestimme den Durchschnitt Q von AB und der zweiten gegebenen Parallelen QS; sodann lege man durch M die MC, welche die QS in S schneidet und bestimme den Durchschnitt V von BS und CQ so wie den Durchschnitt N von AC und MV. Endlich verlängere man die BN, bis sie die CM in O trifft, dann liegt O in der gesuchten Parallelen, mithin ist AO diese Parallele selbst.

Aufgabe IV.

In einem gegebenen Punkt B auf eine gegebene Linie BC ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung 1.

(Figur 105).

Man nehme Q beliebig auf BC und mache QC = QB. In der gleichen Entfernung von Q wähle man die Punkte M und N, welche

Digitized by Google

außerdem ganz beliebig genommen werden können. Man bestimme den Durchschnitt A von BM und CN und den Durchschnitt O von BN und CM, und verlängere AO, bis sie die BC in P trifft. Sodann halbire man AP in R und ziehe CR, welche die AB in S trifft; endlich bestimme man den Durchschnitt X von AC und PS, so ist *B*X die verlangte Senkrechte.

Beweis

Da QB = QC = QM = *Q*N, so läßt sich um das Viereck BMNC ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser BC ist, folglich stehen BN und CM einzeln auf CN und BM senkrecht; mithin ist nach Lehrsatz XVI auch AP zu *B*C senkrecht. Aus Lehrsatz III, Zusatz 2, folgt ferner, daß BX mit AP parallel ist, also ist XB das verlangte Perpendikel.

Auflösung 2.

(Figur 106).

Man nehme auf *B*C den Punkt D beliebig und wähle den Punkt E so, daß DE = DB ist, übrigens willkürlich. Sodann messe man BE, mache BC = BE und EF = BC, endlich trage man von C aus auf *C*F zweimal die Länge BD, so daß CA = 2BD wird, und ziehe A*B*, so ist A*B* das verlangte Perpendikel.

Beweis

Es sei G die Mitte von AC, so ist zu zeigen, daß G*B* = GA = GC sei. Alsdann nämlich läßt sich über AC als Durchmesser ein Kreis beschreiben, welcher durch *B* geht, und mithin ist ∠ A*B*C = R. Daß aber G*B* = GA = GC ist, folgt also:

Nach der Construktion ist

EF = *B*C
ED = *B*D folglich auch
EF — ED = *B*C — *B*D d. h.
DF = CD mithin
△ FDC ∽ △ *B*DE und
∠ DCF = ∠ D*B*E.

Da ferner *B*E = *B*C, *B*D = CG ist, so stimmen die Dreiecke *B*ED und *B*CG in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also einander gleich. Nun ist aber △ *B*ED gleichschenkelig, mithin ist

Digitized by Google

auch das Dreieck *BCG* gleichschenkelig, d. h. es ist $GB = GC = GA$, wie zu erweisen war.

Aufgabe V.

Von einem unzugänglichen Punkte X ein Perpendikel auf eine zugängliche Linie *BC* zu fällen.

Auflösung.

(Figur 107).

Man ziehe nach Aufgabe IV die *BA* senkrecht zu *BC*, so handelt es sich einzig darum, durch den unzugänglichen Punkt X eine Parallele mit *AB* zu ziehen. Zu dem Ende bestimme man den Durchschnittspunkt J von XA und *BC*, mache $BH = BA$ und suche den Durchschnittspunkt K von XH und *BC*, endlich noch den Durchschnittspunkt L von AK und JH, so ist XL die verlangte Senkrechte.

Beweis

Der Beweis folgt aus Lehrsatz III, Zusatz 2.

Aufgabe VI.

Von einem gegebenen Punkt A auf eine unzugängliche Linie *BC* ein Perpendikel zu fällen.

Auflösung.

(Figur 105).

Es seien *B*, C zwei Punkte der unzugänglichen Linie *BC*; man fälle nach Aufgabe V von *B* auf *AC* die Senkrechte *BN* und von C auf *AB* die Senkrechte CM, bestimme den Durchschnittspunkt O von *BN* und CM und ziehe AO, so ist dies die verlangte Senkrechte.

Beweis.

Der Beweis folgt aus Lehrsatz XVI.

Aufgabe VII.

Einen Winkel mit zugänglichem Scheitelpunkt zu halbiren.

Digitized by Google

Auflösung.

(Figur 108.)

Der gegebene Winkel sei CAE; man nehme auf dem einen Schenkel AC die Punkte *B* und C beliebig und wähle auf dem anderen Schenkel AE die Punkte *D* und E so, daß AD = *AB*, DE = *BC* wird; sodann suche man den Durchschnittspunkt F der Linien *BE* und DC und verbinde *A* mit F, so ist die Linie *AF* die gesuchte Halbirungslinie.

Beweis.

Da △ CAD = △ *ABE* ist, so ist auch
∠ ACF = ∠ *AEF*.

Eben so

∠ *ADC* = ∠ *ABE* und darum auch
2R — *ADC* = 2R — *ABE* d. h.
∠ FDE = ∠ *FBC*.

Die Dreiecke FDE und *FBC* stimmen also in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein; daraus folgt ihre Gleichheit, d. h. es ist

△ *FDE* = △ FBC und
BF = DF. Da nun auch
AB = AD und
AF = *AF*,

so stimmen die Dreiecke *ABF* und *FAD* in allen drei Seiten überein; sie sind also gleich und es ist

∠ BAF = ∠ *FAD*

was zu erweisen war.

Aufgabe VIII.

Einen Winkel zu halbiren, dessen Scheitel unzugänglich ist.

Auflösung.

(Figur 23, b.)

BAC sei der gegebene Winkel, dessen Scheitel *A* unzugänglich ist. — Man nehme auf den Schenkeln des Winkels die Punkte B und C beliebig und halbire sodann nach Aufgabe VII die Winkel *ABC* und *ACB* durch die Halbirungslinien Bs und Cs, so wie ihre Nebenwinkel CBM und BCN

Digitized by Google

durch die Halbirungslinien *BN* und CM; man bezeichne die Durchschnittspunkte s und S eines jeden Paares von Halbirungslinien und ziehe sS, so ist dies die verlangte Halbirungslinie des Winkels BAC.

Beweis

Der Beweis folgt aus Lehrsatz XXVI.

Zusatz.

Will man die Größe des Abstandes SA bestimmen, so messe man die Geraden SP und Ps, dann hat man, weil die Punkte S, P, s, A vier harmonische Punkte sind, die Proportion:

$$SP : Ps = SA : sA \text{ oder}$$
$$SP : Ps = SA : SA - Ss \text{ mithin}$$
$$SA = \frac{SP.\ Ss}{SP - Ps.}$$

Aufgabe IX.

Eine Linie *AB* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung.

(Figur 109.)

Man ziehe aus einem beliebigen Punkt Q die QR mit AB parallel und bestimme den Durchschnittspunkt *C* von *A*Q und BR. Eben so bestimme man den Durchschnittspunkt d von *A*R und BQ und verlängere *C*d, bis sie die *AB* in D trifft, so ist

$$AD = BD = {}^1/_2\,AB.$$

Man ziehe jetzt Qd, welche die AR in e trifft, und *C*e, welche die *AB* in E trifft, dann ist

$$AE = {}^1/_3\,AB.$$

Ferner ziehe man QE, welche die *A*R in f trifft, und *C*f, welche die *AB* in F trifft, so ist

$$AF = {}^1/_4\,AB.$$

Fährt man so fort, so erhält man

$$AG = {}^1/_5\,AB$$
$$AN = \frac{1}{n}\,AB$$
$$AN' = \frac{1}{n+1}\,AB.$$

Digitized by Google

Beweis.

Daß $AD = BD$, folgt aus Lehrsatz III, Zusatz 2. Ferner ist wegen des vollständigen Vierecks $CQedDA$ (Lehrsatz XXXVIII):

$AE : ED = AB : DB$. Aber

$AB : DB = 2 : 1$ mithin auch

$AE : ED = 2 : 1$ folglich

$AE = 2ED = \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}AB$.

Eben so ist wegen des vollständigen Vierecks $CQfeEA$:

$AF : FE = AD : DE$. Aber

$AD : DE = 3 : 1$ daher auch

$AF : FE = 3 : 1$ mithin

$AF = 3FE = \frac{3}{4}AE = \frac{1}{4}AB$.

Auf gleiche Weise erhält man:

$AG : GF = AE : EF$ und

$AE : EF = 4 : 1$ mithin

$AG : GF = 4 : 1$ d. h.

$AG = 4GF = \frac{4}{5}AF = \frac{1}{5}AB$.

Fährt man so fort, so kann man jeden beliebigen Theil von AB darstellen, d. h. man erhält allgemein:

$$AN = \frac{1}{n}\,AB$$

$$AN' = \frac{1}{n+1}\,AB.$$

Aufgabe X.

Eine gegebene Linie AB über ein Hinderniß O, wodurch dieselbe verdeckt wird, hinaus zu verlängern.

Auflösung 1.

(Figur 110.)

Man wähle außerhalb AB einen beliebigen Punkt C und bestimme auf den Linien AC und BC die Punkte D und E so, daß DE über das Hinderniß O hinausgeht. Sodann suche man den Durchschnittspunkt F von AE und BD, nehme auf CF den Punkt G beliebig und bezeichne die Durchschnittspunkte J und H von EG mit AC und von DG mit BC. Ver-

Digitized by Google

längert man jetzt JH, bis sie die ED in P trifft, so liegt dieser Punkt *P* in der Verlängerung von AB.

Beweis I

Da CEGDHJ ein vollständiges Viereck ist, so sind E, Q, D, P vier harmonische Punkte; da aber ebenfalls *CDFEAB* ein vollständiges Viereck ist, so muß der 4te zu E, Q, D gehörende und dem Punkt Q zugeordnete harmonische Punkt P auf der dritten Diagonale AB liegen, mithin sind B, A, P in gerader Linie oder es liegt der Punkt P in der Verlängerung von AB, wie verlangt wurde.

Auflösung 2.

(Figur 111.)

Man nehme außerhalb AB den Punkt C, und N beliebig in der Linie BC, D beliebig auf AC, doch so, daß ND über das Hinderniß O hinausfällt. Sodann bestimme man E, den Durchschnitt von AN und BD, F den Durchschnitt von ND und CE, G den Durchschnitt von BF und AC, endlich K den Durchschnitt von BD und NG. Verlängert man jetzt CK und ND, bis sie sich treffen, so ist ihr Durchschnittspunkt P der gesuchte Punkt, der in der verlängerten AB liegt.

Beweis.

Da BDGNKC ein vollständiges Viereck ist, so sind die Punkte N, *F*, D, P vier harmonische Punkte (Lehrsatz XXXVIII). Aber auch CDENAB ist ein vollständiges Viereck, dessen eine Diagonale ND dieselbe, wie für das Viereck BDGNKC ist. Mithin liegt auch der 4te den Punkten N, *F*, D zugehörige und dem Punkt *F* zugeordnete harmonische Punkt auf AB. Da dieser Punkt nun P ist, so liegt P auf der verlängerten AB, wie verlangt wurde.

Aufgabe XI.

Durch einen gegebenen Punkt A eine Linie nach dem unsichtbaren Durchschnittspunkte zweier anderen Linien HJ und DE zu ziehen.

Auflösung.

Der gegebene Punkt A liegt entweder außerhalb der beiden gegebenen Linien oder innerhalb derselben.

Digitized by Google

(Figur 110).

Ister Fall. Man lege durch A eine gerade Linie AC, welche die gegebenen Linien in J und D trifft, und nehme auf denselben Linien HJ DE noch zwei andere Punkte H, E, welche mit C in gerader Linie liegen. Sodann bestimme man den Durchschnitt G von DH und JE, sowie den Durchschnitt F von CG und AE und endlich den Durchschnitt B von DF und CH, so ist AB die verlangte Linie, welche durch den Durchschnitt *P* von JH und DE geht

(Figur 112).

IIter Fall. Man ziehe durch *A* zwei Geraden JE und HD, und suche den Durchschnitt C von JD und HE. Durch C lege man eine zweite Linie CG, welche die HJ und DE in G und F trifft, und suche den Durchschnitt B von JF und DG, so ist AB die verlangte Linie, welche durch P geht.

Beweis

(Figur 112.)

Der Beweis für den ersten Fall liegt im Beweis für Auflösung I der Aufgabe X, für den zweiten Fall ergibt er sich wie folgt:

In dem Viereck JHEDPC sind PJ, PA, PD, PC vier harmonische Strahlen; das Viereck JGFDPC aber hat drei Strahlen PJ, PD und PC mit dem ersten gemein; da nun durch drei Strahlen die Lage des vierten bestimmt ist, so muß PB mit PA zusammenfallen, oder die Punkte A, B, P liegen in gerader Linie.

Aufgabe XII.

Durch einen gegebenen Punkt Q eine Parallele mit einer unzugänglichen Linie *AB* abzustecken.

Auflösung 1.

(Figur 113.)

Man nehme auf Q*A* und QB die Punkte C und D beliebig und bestimme E, den Durchschnitt von AD und B*C* und F den Durchschnitt von *CD* und QE. Sodann mache man FG = *FQ*, *FH* = *CF*, verbinde G mit H durch die Gerade GH und bestimme b, den Durchschnitt von GH

Digitized by Google

und AD. Endlich verlängere man Gb und mache CJ = Gb und ziehe endlich QJ, so ist diese die verlangte Parallele.

Beweis.

Da zufolge der Construktion

$$FG = FQ$$
$$CF = FH$$

ist, so ist das Viereck CGHQ ein Parallelogramm und aF = Fb. Weil aber

$$Aa, AF, Ab, AB$$

vier harmonische Strahlen sind, so ist ab mit AB parallel (Lehrs. XXXVI).

Ferner ist zufolge der Construktion:

$$GF = FQ \text{ und}$$
$$Gb = bJ, \text{ daher auch}$$
$$GF : FQ = Gb : bJ,$$

mithin ist QJ mit ab und deßhalb auch mit AB parallel.

Auflösung 2.

(Figur 114).

Man wähle außerhalb AB die Punkte C und D beliebig und ziehe aus Q mit BC die Parallele QE, (Aufgabe II), was offenbar geschehen kann, ohne daß der Punkt B zugänglich sein muß, weil man nur von C an zwei gleiche Theile auf CB aufzutragen hat. Man bestimme E, den Durchschnitt von QE und CD und lege durch E mit CA die Parallele EF (Aufgabe II), welche die AD in F schneidet; zieht man nun QF, so ist dies die verlangte Parallele.

Beweis

Weil EQ parallel mit BC, EF parallel mit AC ist, so folgt:

$$BQ : QD = CE : ED \text{ und}$$
$$CE : ED = AF : FD, \text{ mithin auch}$$
$$BQ : QD = AF : FD, \text{ folglich ist}$$
QF mit AB parallel.

Aufgabe XIII.

Eine Linie AB zu messen, welche total unzugänglich ist.

Digitized by Google

Auflösung.

(Figur 113).

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt Q mit der gegebenen Linie AB die Parallele QJ (Aufgabe XII), nehme auf QJ einen beliebigen Punkt L und bestimme den Durchschnitt D von *A*L und *B*Q. Sodann messe man die Geraden Q*B* (Aufgabe I), QD und QL, so hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke QDL und *ABD*

$$QD : QL = BD : AB \text{ oder}$$
$$QD : QL = QB - QD : AB.$$

Mithin ist

$$AB = \frac{QL\,(QB - QD).}{QD.}$$

Aufgabe XIV.

Die Entfernung eines Punktes Q von einer unzugänglichen Linie *AB* zu bestimmen.

Auflösung.

(Figur 115).

Man ziehe von Q auf *AB* die Senkrechte QP (Aufgabe VI), nehme auf Q*B* den Punkt D beliebig, bestimme *F*, den Durchschnitt von Q*P* und AD, ferner E, den Durchschnitt von BF und QA, endlich O, den Durchschnitt von DE und QP. Sodann messe man QO und OF, so ist nach Lehrsatz XXXVIII:

$$QO : OF = QP : PF \text{ oder}$$
$$QO : OF = QP : QP - QF$$

und hieraus:

$$QP = \frac{QO.\ QF}{QO - OF.}$$

Ist z. B. QO = a, OF = b, QP = x, so ist

$$x = \frac{a\,(a + b)}{a - b.}$$

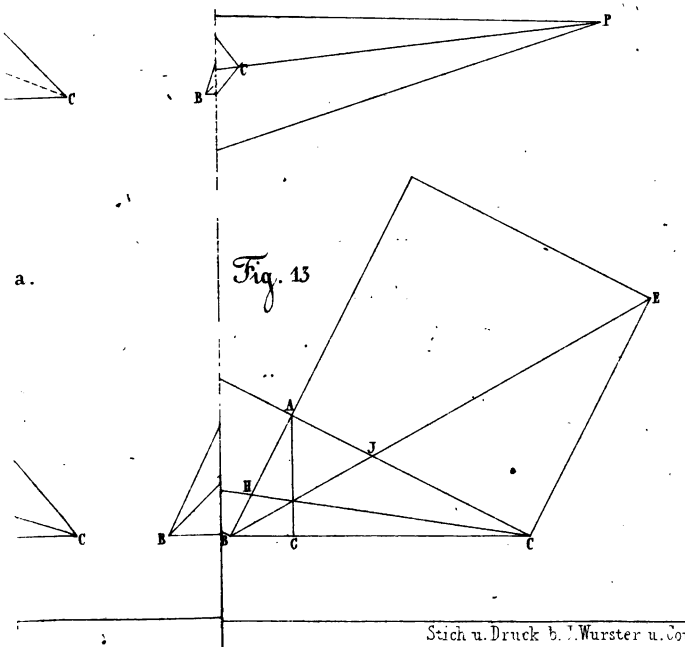
Digitized by Google

Druckfehler.

Seite	18	Zeile	16	von oben statt O — O′.
„	26	„	1	von oben st. AE — BE.
„	26	„	10	von unten st. Seiten — Seite.
„	49	„	20	von oben st. $\beta\gamma$ — $\gamma\delta$.
„	49	„	21	von oben st. $\beta\gamma$ — $\gamma\delta$.
„	80	„	15	von unten st. Viekecks — Vielecks.
„	86	„	6	von unten st. Palaren — Polaren.

Digitized by Google

Digitized by Google



a.

Fig. 13

Stich u. Druck b. J. Wurster u. Comp.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 14 b.

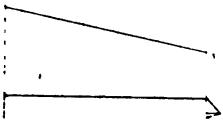


Fig. 16 b.

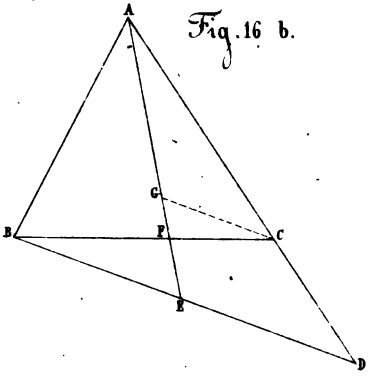
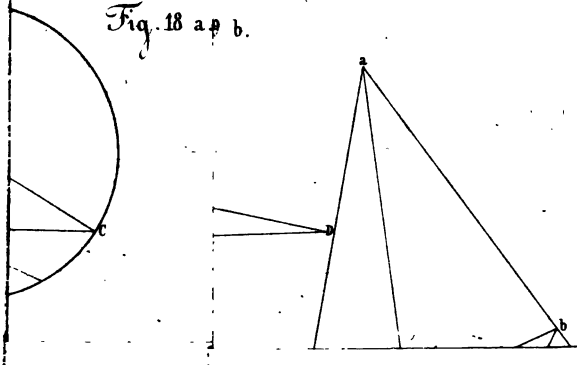


Fig. 18 a & b.



OF WICH

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 29.

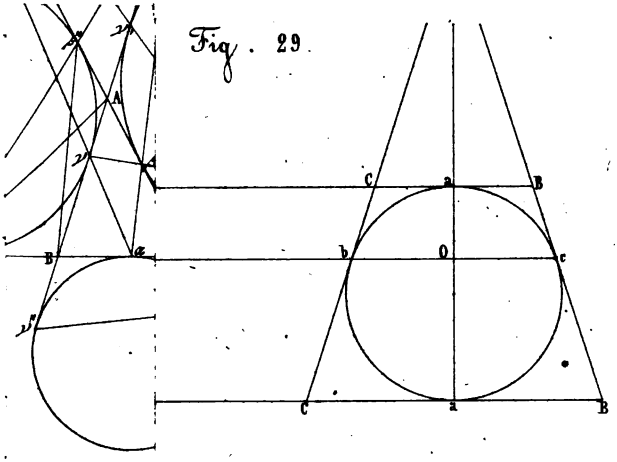
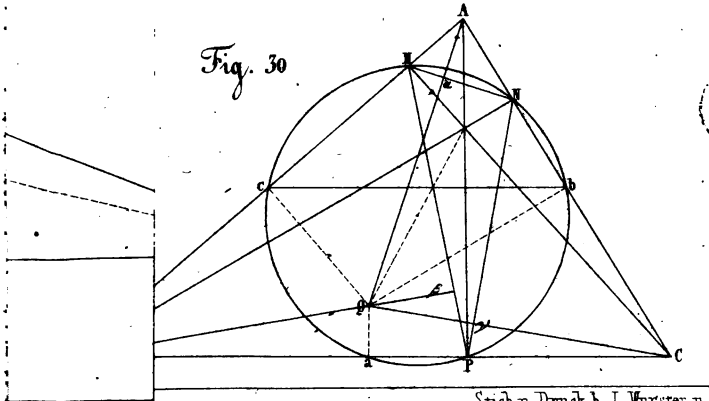


Fig. 30.



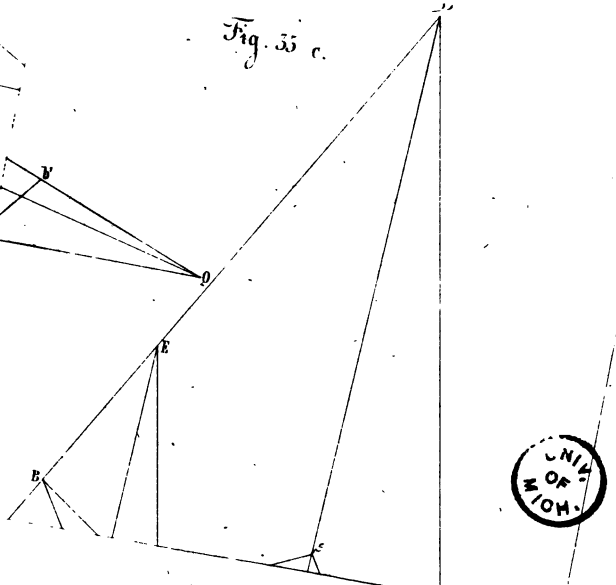
Stich u. Druck b. J. Wurster u. Comp.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 31

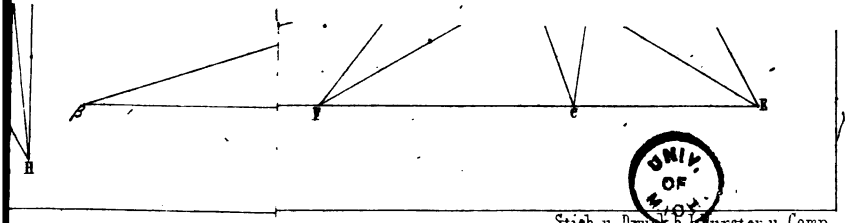
Fig. 35 c.



UNIV. OF WISH.

Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.

Stich u. Druck d. Wurster u. Comp.

Digitized by Google

Digitized by Google

A

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

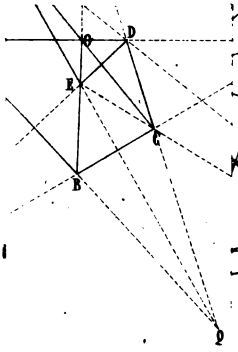


Fig. 65 a.

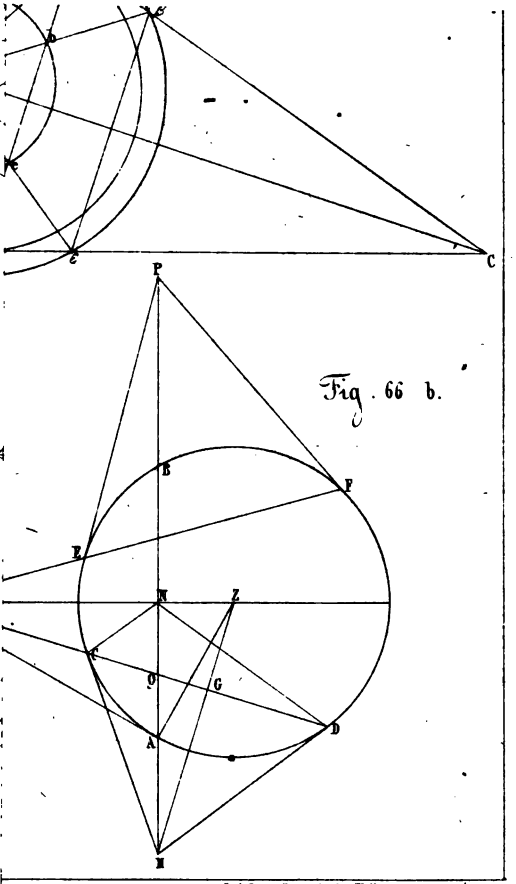


Fig. 66 b.

Stich u. Druck b. J. Hurster u. Comp

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 70

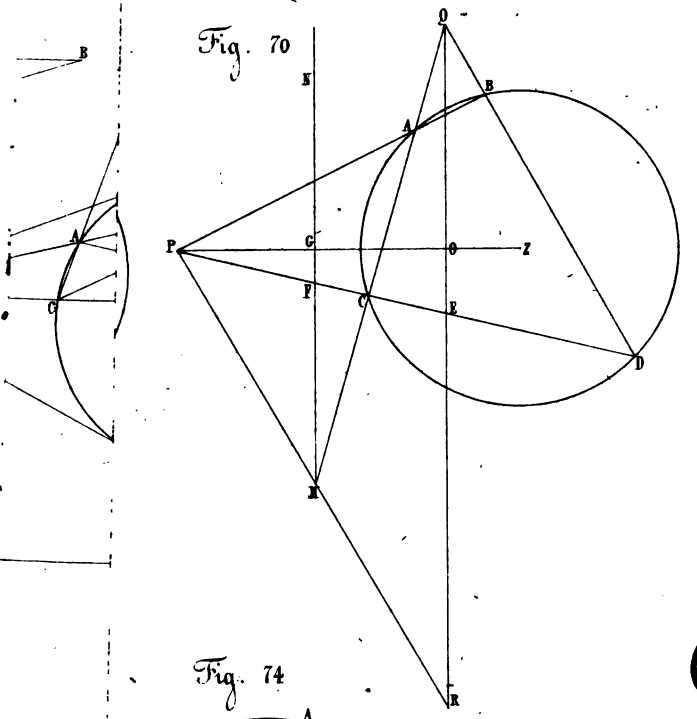
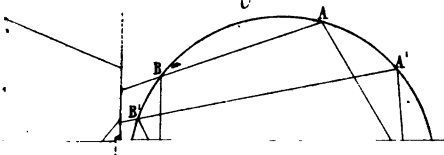


Fig. 74



UNIV. OF WOH.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 88

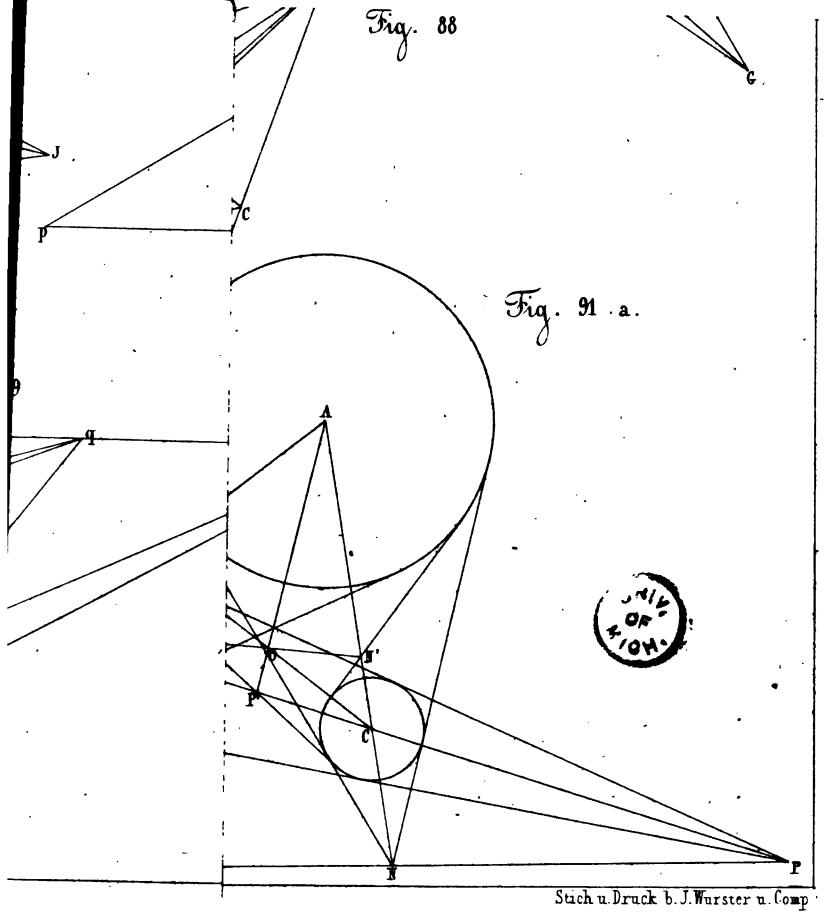


Fig. 91 a.

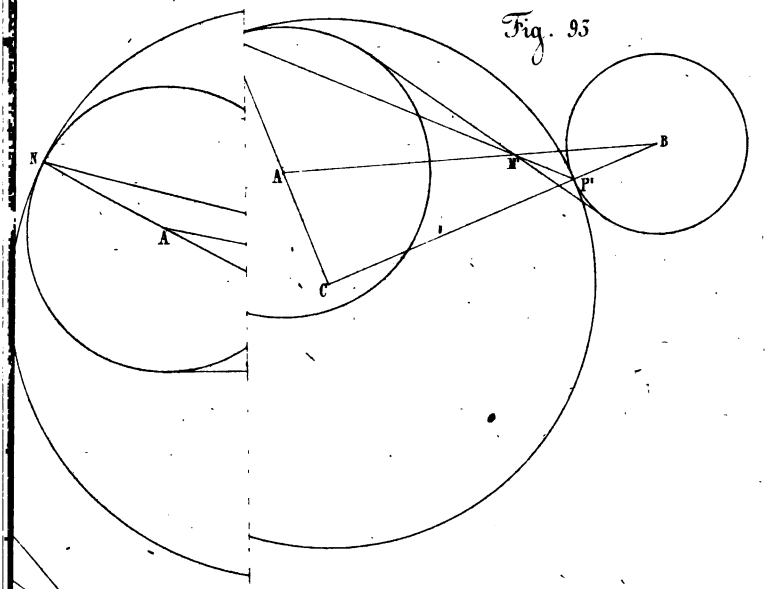
UNIV. OF MICH.

Stich u. Druck b. J. Wurster u. Comp

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 93



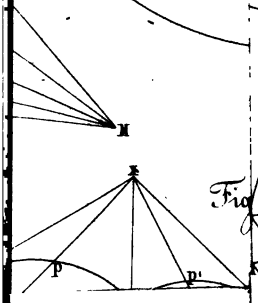
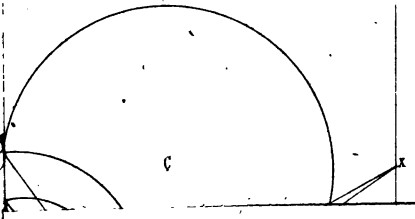


Fig.



Digitized by Google

Digitized by Google

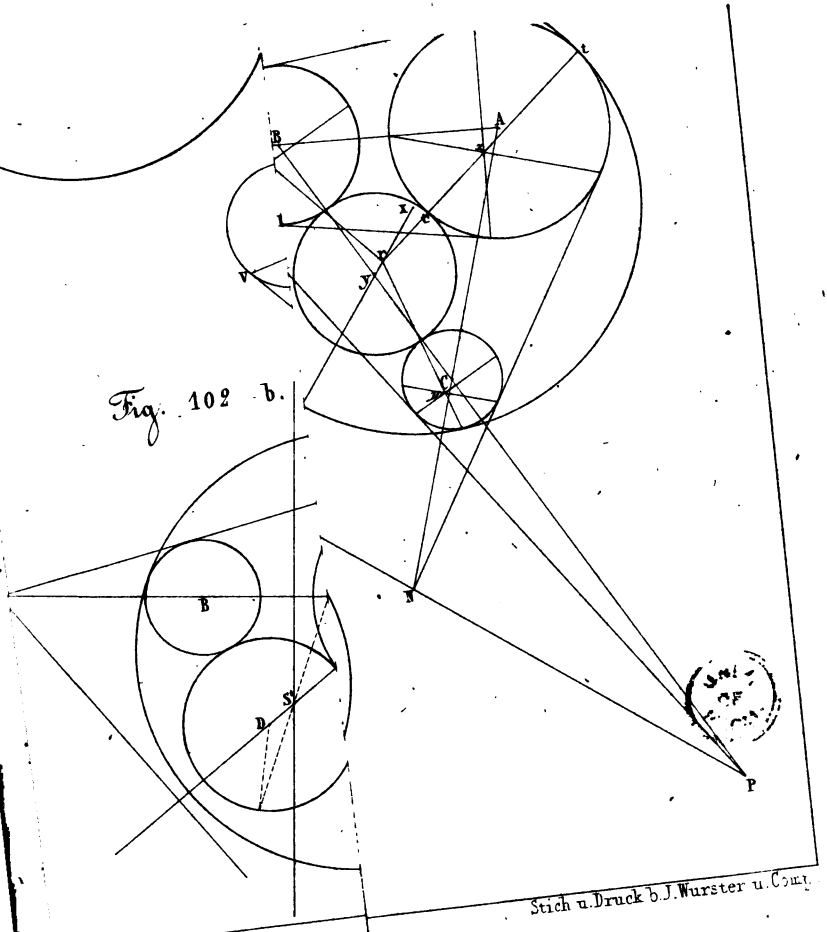


Fig. 102 b.

Stich u. Druck b. J. Wurster u. Comp.

Digitized by Google

Digitized by Google